

尽数関係にある公転軌道の天体が描く美しい図形

石坂 千春*

概要

太陽系の惑星や衛星には、その公転周期が互いに整数比になっている軌道をとるものが少なくない。こうした尽数関係にある公転軌道をとる天体について、一定の時間間隔で軌道上の位置を線分でつなぐと、その包絡線が美しい幾何学模様を描く。周期の整数比と幾何学模様の関係について考察する。

1. はじめに

金星と地球の会合周期は583.9日であり、8年間にちょうど5回会合する($365.2日 \times 8年 \div 583.9日 = 5$)。

金星と地球が会合する位置を公転軌道上で順番につなぐと、ペンタグラム(五芒星)を描くことが古くから知られている[1]。

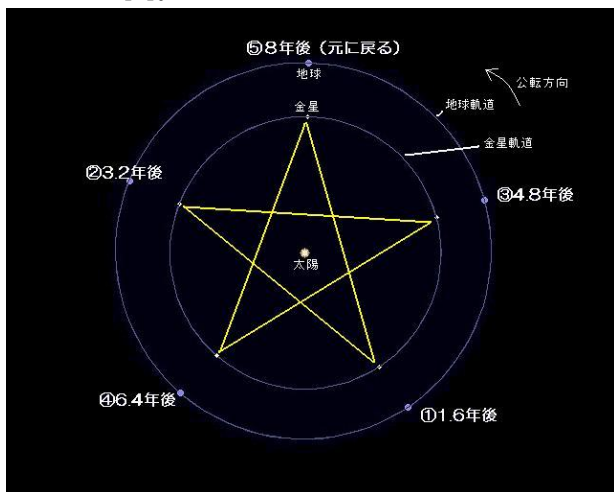


図1. 金星と地球の会合位置が公転軌道上にペンタグラムを描く。

このように、太陽系の天体同士で、公転周期に特別な関係をもつものは他にもある。

本報告では特に、互いの公転周期が整数比になっている(「尽数関係」というものについて考察する。

尽数関係にある天体としては、たとえば、木星のガリレオ衛星が有名である。イオ、エウロパ、ガニメデの公転周期の比は、1:2:4であり、ガニメデとカリストの公転

周期の比は3:7である[2]。

逆に、火星と木星の間にある小惑星帯では、木星(軌道長半径5.2天文単位=太陽からの距離が約7.8億km)の公転周期11.86年に對し、1:2(軌道長半径3.3天文単位)、3:7(同3.0天文単位)、2:5(同2.7天文単位)、1:3(同2.5天文単位)のあたりには小惑星がほとんど存在しない(「カークウッドの空隙」という)ことが知られている[2]。

互いの公転周期が整数比になる原因として、共鳴軌道になっている場合がある。軌道共鳴は、中心天体(太陽など)と、その周りを公転する2天体(惑星など)の間の周期的な重力の変化により公転軌道が影響を受けるものである。共鳴によって軌道が安定になる場合もあれば、不安定になる場合もあるが、軌道共鳴の計算は基本的に「三体問題」であり、共鳴が起きているかどうかの判定が難しいものも多い。

本報告では、整数比の周期をもつ尽数関係の公転軌道上における、同時刻での内側天体と外側天体の位置を線分でつないだ時、それらの線分の包絡線(線分群に接する曲線)がどのような図形を描くのかを見る。そして、実際の太陽系において安定な軌道となっている場合(ガリレオ衛星など)と、不安定な軌道となっている場合(カークウッドの空隙など)について、包絡線の描く図形がどのように異なるのかを考察する。

単純な計算を行うだけなので、力学を知らなくても、軌道共鳴についての知見が得られるものと期待する。

2. 計算方法

簡単のため、天体の軌道は円とし、一定の速度で軌道上を周回するものとする。

*大阪市立科学館 学芸課/中之島科学研究所
ishizaka@sci-museum.kita.osaka.jp

内側天体(天体1)の公転周期と外側天体(天体2)の公転周期の比を $N_1:N_2$ とすると、外側天体の軌道半径が1の時、内側天体の軌道半径 a_1 はケプラーの第3法則より、

$$a_1 = \sqrt[3]{(N_1/N_2)^2}$$

と書ける[3]。

MSエクセルにより、一定の時間間隔で天体1と天体2の位置を計算し、図にプロットする。図化するに当たり、x軸(正)上で会合していた両天体が反時計回りに公転し、再びx軸(正)上で会合するまで、同時刻での両天体の位置同士を線分で接続した(【付録1】)。

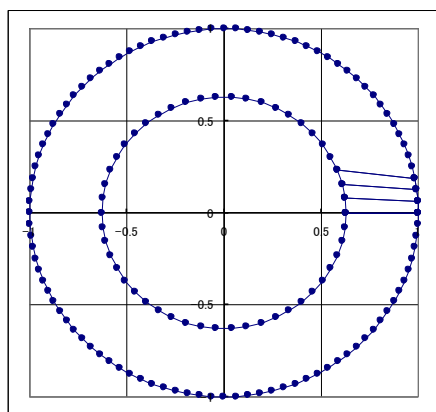


図2. 図化の途中経過

天体は反時計回りに公転している。同時刻の内側天体の位置と外側天体の位置を線分で接続する。

3. 結果

互いの公転周期が整数比になっている代表的な場合について計算した結果を以下に示す。

3-1 公転周期の比が1:2の場合

木星のガリレオ衛星のうち、内側の3つ(イオ、エウロパ、ガニメデ)は、公転周期の比が1:2の共鳴軌道になっている(表1)。

他に、公転周期が1:2になっているものに、土星の衛星のミマスーテチス、エンケラドスーディオネがある。

また、公転周期が木星の1/2になる軌道付近には小惑星がほとんど存在せず、空隙になっていることが知られている[2]。

表1. ガリレオ衛星の公転周期[2]

衛星	公転周期(日)
イオ	1.77
エウロパ	3.55
ガニメデ	7.15

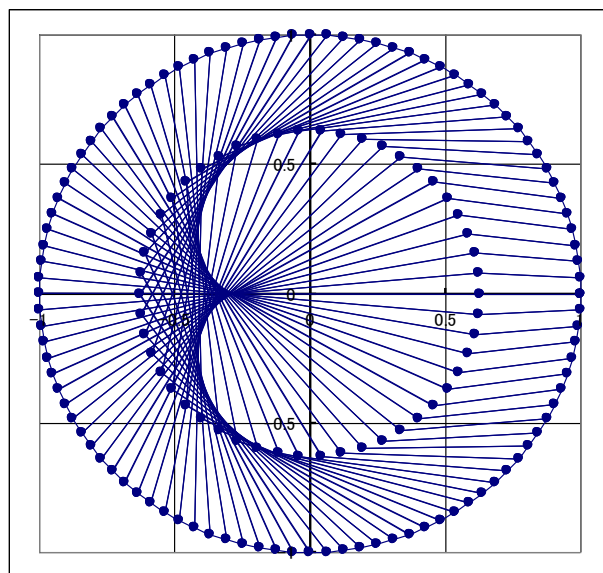


図3. 公転周期の比 1:2 (内側天体の軌道半径 $a_1=0.63$)

同時刻での内側天体と外側天体の位置を線分でつないでいる。x軸上で会合していた両天体が反時計回りに公転し、再びx軸上で会合するまでを表示している(以下の図でも同様)。

3-2 公転周期の比が2:3の場合

海王星と冥王星の関係、および小惑星のHilda群と木星との関係は、公転周期の比が2:3である。また、本報告で扱う事例とは少し異なるが、水星の自転と公転は同期しており、その周期の比も2:3である。

周期2:3の場合を図示したものが図4である。

包絡線が描く図形は、凸部が1つ、凹部が1つで、右に90度倒したハート型になっている。

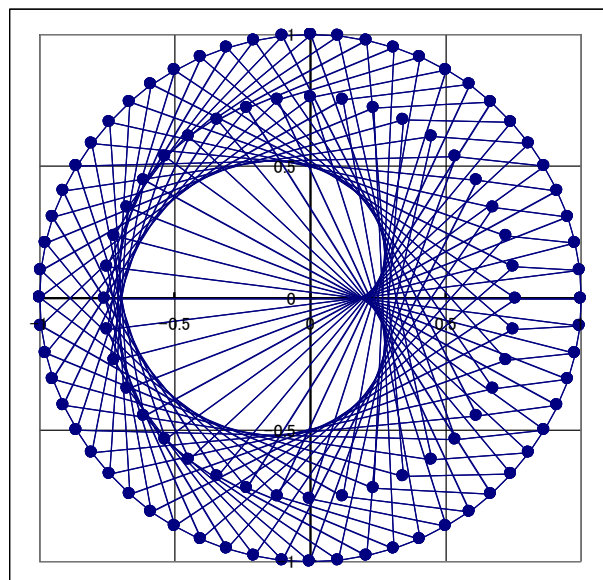


図4. 公転周期の比 2:3 ($a_1=0.76$)

3-3 公転周期の比が 3 : 4 の場合

小惑星のThule群6個は、その公転周期が木星の公転周期と3:4の整数比になっている。また、土星の衛星タイタンとヒペリオンも同様の尽数関係である。

図5を見ると、左に90度倒したハート型が目立つが、よく見ると内側天体の軌道と、“ハート型”の間に、右に90度倒した丸いハート型がもう一つ描かれているのがわかる。

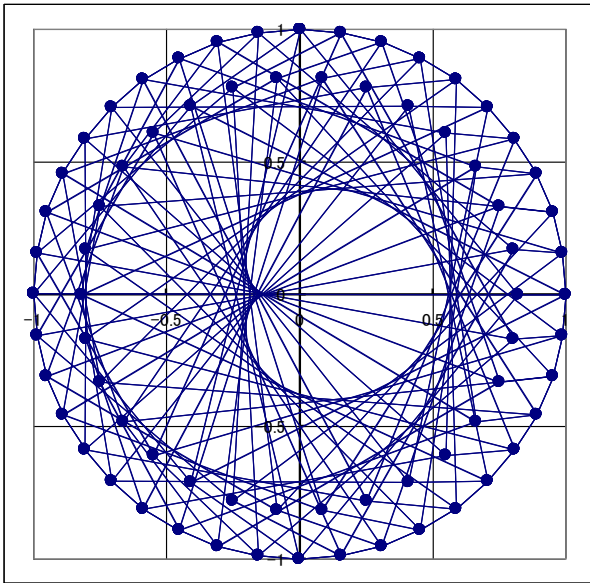


図5. 公転周期の比 3 : 4 ($a_1=0.82$)

3-4 公転周期の比が 1 : 3 の場合

木星の公転周期の1/3になる小惑星帯は、やはり小惑星がほとんど存在しない領域である。

包絡線はハート型を描いていない(図6)。

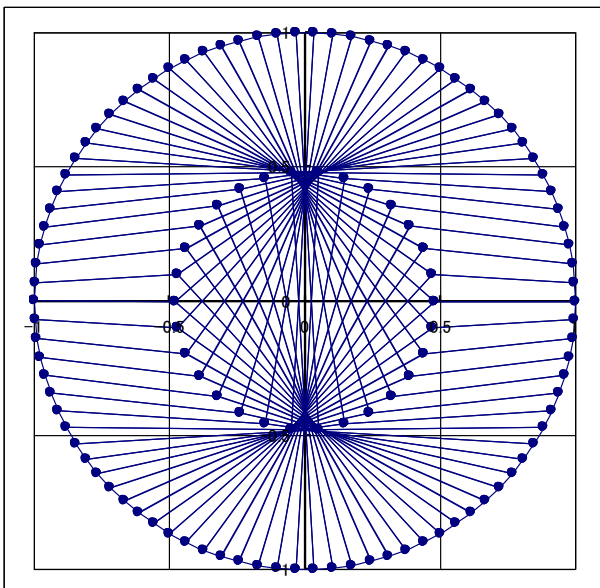


図6. 公転周期の比 1 : 3 ($a_1=0.48$)

3-5 公転周期の比が 1 : 4 の場合

木星の公転周期の1/4になる小惑星帯も、カークウッドの空隙の一つである。一方、火星の衛星のフォボスとダイモスの公転周期は、ほぼ1:4である。

前節同様、ハート型を描いていないことが見て取れる(図7)。

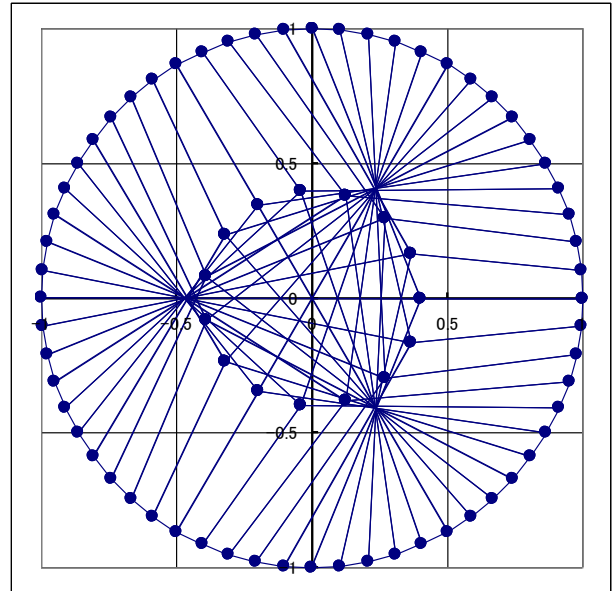


図7. 公転周期の比 1 : 4 ($a_1=0.4$)

3-6 公転周期の比が 1 : 5 の場合

該当する天体は無いが、参考のため、計算したものを図示する(図8)。

包絡線の図形として、正方形が見える。

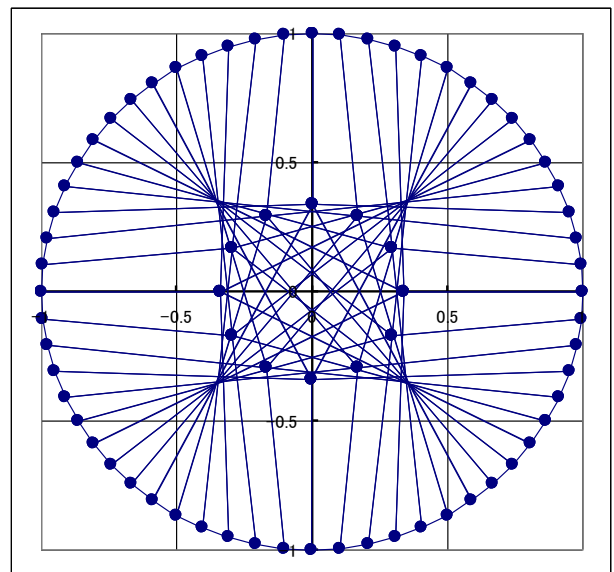


図8. 公転周期の比 1 : 5 ($a_1=0.34$)

3-7 公転周期の比が 2 : 5 の場合

小惑星帯では、木星の公転周期と2:5の関係のある軌道付近もまたカークウッドの空隙である。

ちなみに、木星の公転周期 (11.86年) と土星の公転周期 (29.46年) も、ほぼ、2:5になっている。

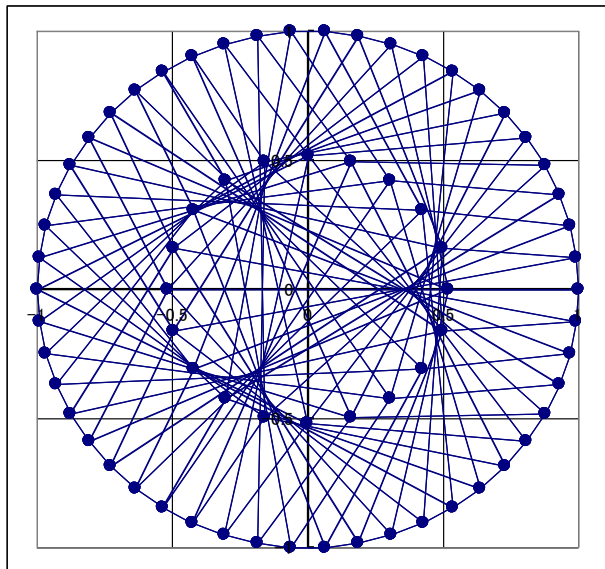


図9. 公転周期の比 2:5 ($a_1=0.52$)

外側の円が木星軌道だとすると、内側の円がカークウッドの空隙にあたる。

3-9 公転周期の比が 3 : 7 の場合

木星の公転周期と3:7の関係にある軌道付近の小惑星帯は、やはり空隙である。一方、ガリレオ衛星のガニメデとカリストは、公転周期が3:7の尽数関係にある。

外側のカリストは3回公転する間に、ガニメデと4回会合し、その包絡線は、なんと“四葉のクローバー”を描いている(図11)。

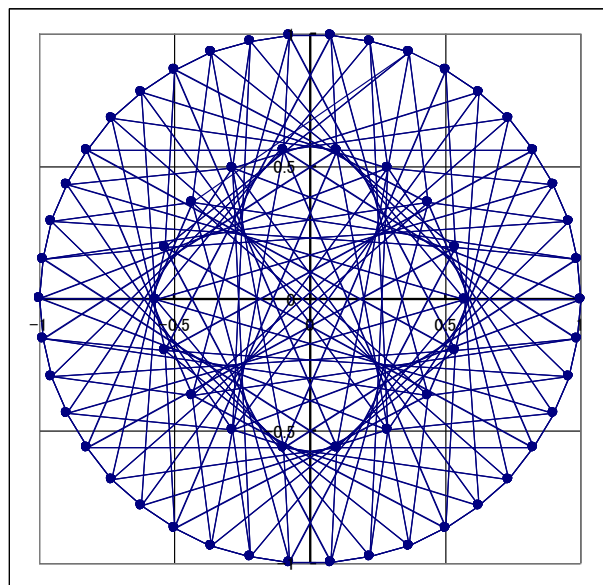


図11. 公転周期の比 3:7 ($a_1=0.57$)

3-8 公転周期の比が 3 : 5 の場合

太陽系外縁天体1994JS(軌道長半径42.5天文単位)は海王星(同30.1天文単位)と、3:5の共鳴軌道にあり、3回公転する間に、2回、海王星と会合する。包絡線の模様には“双葉”が見える。

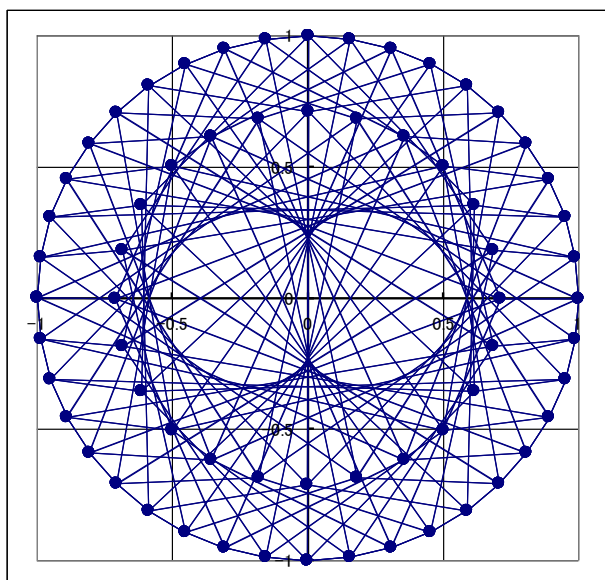


図10. 公転周期の比 3:5 ($a_1=0.71$)

3-10 公転周期の比が 5 : 8 の場合

公転周期の比が5:8の場合、外側天体が5回公転する間に3回会合し、包絡線は、“三つ葉のクローバー”を描く(図12)。

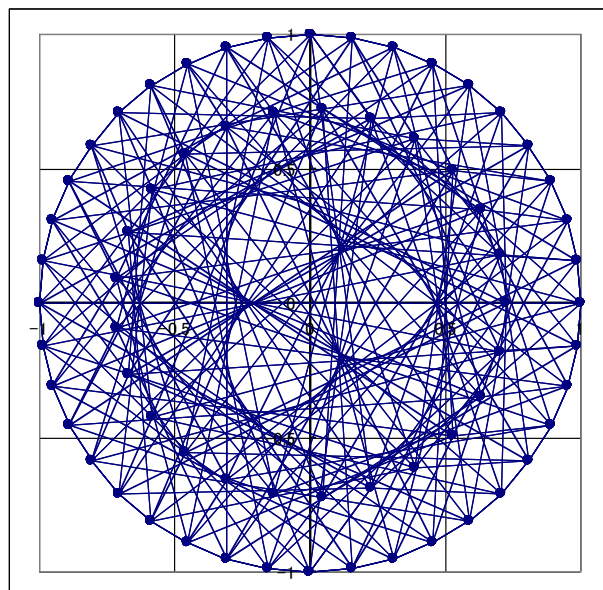


図12. 公転周期の比 5:8 ($a_1=0.73$)

3-1-1 公転周期の比が8:13の場合

金星(公転周期0.615年)と地球(公転周期1年)の関係である。第1章で述べたように、金星と地球は8年間に5回会合する。

金星と地球をつなぐ線分の包絡線群は、なんと、バラ科の特徴である、美しい5弁の花を描く(図13)。

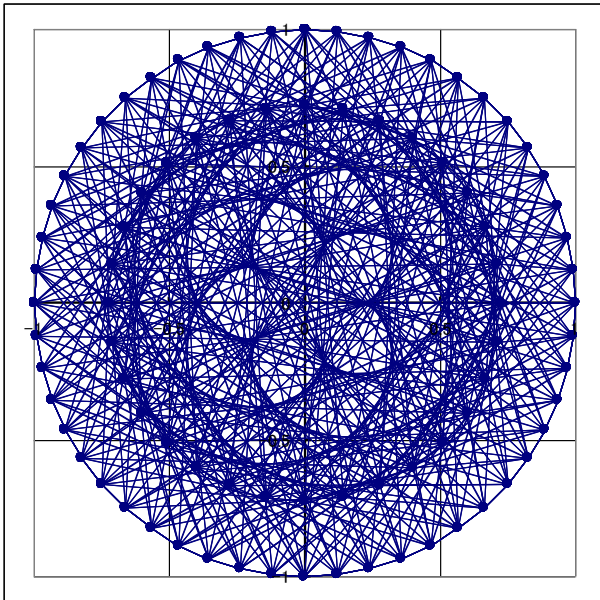


図13. 公転周期の比 8:13 ($a_1=0.72$)

外側の円が地球の軌道、少し見づらいが内側の円が金星の軌道に相当する。金星軌道の内側に、“五弁の花”が4つ重なっているように見える。

ところで、金星と地球の公転周期の比(1:1.625)は、ほぼ黄金比(1:1.618...)になっている、とも言える。

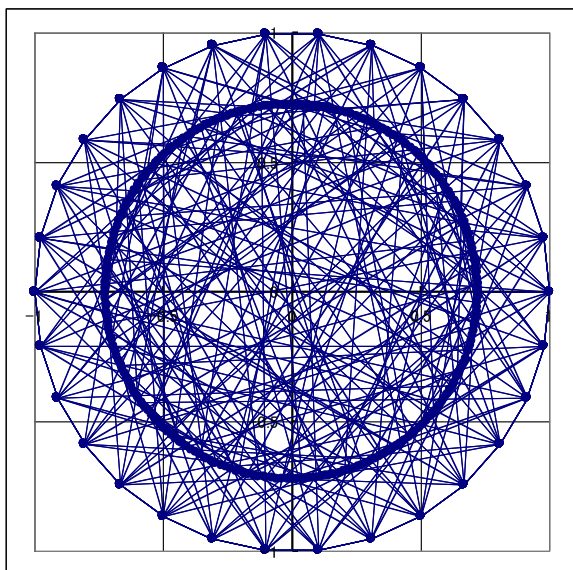


図14. 黄金比の場合 ($a_1=0.73$)

黄金比は、フィボナッチ数列{1,1,2,3,5,8,13,...}の隣り合う数同士の比の極限として表わされる。3-8節で見た「3:5」、3-10節の「5:8」、3-11節の「8:13」は、じょじょに黄金比に近づいていたわけである。

黄金比の場合を図示したものが図14である。

黄金比は無理数であるため、2天体の公転周期は尽数関係にはならない。黄金比は美の象徴とされることがあるが、公転周期が黄金比になっている天体が描く模様は、あまり美しくないように思われる。

4. 考察

公転周期が整数比になっている尽数関係の軌道をとる天体同士について、一定の時間間隔で軌道上の位置を線分をつなぐと、包絡線が特徴的な幾何学模様を描くことを見てきた。

第1章で述べたように、尽数関係にある公転は安定な場合と不安定な場合がある。判定するには複雑な三体問題を解かねばならないが、文献[2]のデータを見ると、内側天体の質量 m_1 と外側天体の質量 m_2 に対して、

- $m_1 \ll m_2$...不安定(カークウッドの空隙など)
- $m_1 \approx m_2$...安定(ガリレオ衛星など)
- $m_1 > m_2$...安定(海王星-冥王星、など)

という傾向があるように思われる。

本報告では力学までは考慮しなかったが、安定な軌道と不安定な軌道とで、包絡線が描く模様に、次の様な違いがあることが見て取れる。

1) 凸部の数や形

内側天体(1)と外側天体(2)の周期の比を $N_1:N_2$ とすると、外側天体が N_1 回公転する間に、両天体は N_2-N_1 回会合する。包絡線が描く模様は周期比の整数の差(N_2-N_1)と同じ数の凹部や凸部をもつ。

実際に安定な軌道として天体が存在するような整数比(2:3, 3:4, 3:5, 3:7, 8:13など)の場合、包絡線が描く図形の凸部は丸みを帯びている。

一方、不安定な軌道になっている整数比(1:3, 1:4, 1:5など)の場合、そもそも凸部がない(1:3の場合)か、尖った凸部(1:4, 1:5の場合)になっている。

2) 包絡線集中部の位置

包絡線の集中している部分(特に凹部)が内側天体の軌道(a_1)よりも中心に近い場合は安定、逆に、内

側天体の軌道に近いと不安定(もしくは、場合によって不安定)になるように見うけられる。

包絡線集中部は、重力の変化が大きい場所である。この場所が内側天体の公転軌道付近にあり、かつ、内側天体の質量が外側天体の質量より小さければ、特定の場所で定期的に引力の強弱を受け、内側天体の軌道は容易に変化を受けてしまうことが予想される。

このように、単純な計算を行うだけで、力学を知らなくても、軌道共鳴についての知見が得られる可能性があることが、今回の考察によってわかった。

尽数関係にある公転軌道の天体たちは人知れず虚空の宇宙空間に美しい図形を描き続けている。そんな美しい図形に、複雑な天体力学の解が隠れているのかもしれない。

参考文献

- [1]Carl Liungman「Symbols」(HME Publishing)
- [2]国立天文台・編「理科年表」(丸善)
- [3]バーガー&オルソン「力学」(培風館)

【付録1】包絡線図形の描き方

公転する2天体の位置を計算し、本報告で見たような包絡線図形を描く手順は次のとおりである。すべてMSエクセルを利用した。

①天体の位置計算

簡単のため、天体の公転軌道は円としているので、スタートから*i*番目の計算ステップでの内側天体の位置{x₁(*i*), y₁(*i*)}と外側天体の位置{x₂(*i*), y₂(*i*)}は、それぞれ、

$$\begin{aligned} x_1(i) &= a_1 \cdot \cos(360^\circ / n_1 \cdot i) \\ y_1(i) &= a_1 \cdot \sin(360^\circ / n_1 \cdot i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(i) &= a_2 \cdot \cos(360^\circ / n_2 \cdot i) \\ y_2(i) &= a_2 \cdot \sin(360^\circ / n_2 \cdot i) \end{aligned}$$

である。

ここで、*a*₁は内側天体の軌道半径、*n*₁、*n*₂はそれぞれ内側天体と外側天体の軌道上でのステップ数である。内側天体と外側天体の公転周期の比が*N*₁:*N*₂なので、*n*₁:*n*₂=*N*₁:*N*₂であり、いずれのケースでも*n*₁<*n*₂である(内側天体の方が外側天体より公転運動は速いので、1周に必要なステップ数は外側天体のステップ数より少なくなる)。

また、第2章で述べたように、ケプラーの第3法則より、

$$a_1 = \sqrt[3]{(N_1 / N_2)^2}$$

であり、定義より、*a*₁<1である。

包絡線の模様を見やすくするため、外側天体の軌道上のステップ数*n*₂は少なくとも20以上(1ステップあたりの軌道上の移動量は18°未満)が望ましいようである。ただし、あまり多いと、線分が重なり過ぎて、模様が見えなくなる。

*x*軸(正)上で会合している状態からスタートし、再び*x*軸(正)上で会合するまでステップを進め、*n*₂×*N*₁回の計算を行う。

②描画用データの作成

こうして計算した位置データを次のように並べ替える。

<i>x</i> ₂ (0)	<i>y</i> ₂ (0)	・・・外側天体のスタート地点
<i>x</i> ₁ (0)	<i>y</i> ₁ (0)	・・・内側天体のスタート地点
<i>x</i> ₂ (0)	<i>y</i> ₂ (0)	・・・外側天体のスタート地点
<i>x</i> ₂ (1)	<i>y</i> ₂ (1)	・・・外側天体の1ステップ目
<i>x</i> ₁ (1)	<i>y</i> ₁ (1)	・・・内側天体の1ステップ目
<i>x</i> ₂ (1)	<i>y</i> ₂ (1)	・・・外側天体の1ステップ目
<i>x</i> ₂ (2)	<i>y</i> ₂ (2)	・・・外側天体の2ステップ目
・	・	
・	・	
・	・	
<i>x</i> ₂ (<i>n</i> ₂ × <i>N</i> ₁ -1)	<i>y</i> ₂ (<i>n</i> ₂ × <i>N</i> ₁ -1)	・・・最終ステップ
<i>x</i> ₁ (<i>n</i> ₂ × <i>N</i> ₁ -1)	<i>y</i> ₁ (<i>n</i> ₂ × <i>N</i> ₁ -1)	
<i>x</i> ₂ (<i>n</i> ₂ × <i>N</i> ₁ -1)	<i>y</i> ₂ (<i>n</i> ₂ × <i>N</i> ₁ -1)	
<i>x</i> ₂ (<i>n</i> ₂ × <i>N</i> ₁)	<i>y</i> ₂ (<i>n</i> ₂ × <i>N</i> ₁)	・・・再び <i>x</i> 軸上で会合

この数字列に対し、MSエクセルの「グラフ」ウィザード→「散布図」→「データポイントを折れ線をつないだ散布図」により図化すればよい。

【付録2】スピログラフの描き方

公転する2天体の相対位置を追跡し、図示することもできる。これをスピログラフ(「スピログラフ」はハズブロ社の登録商標)と言う。

一方の天体(たとえば内側天体)に対する他方の天体(外側天体)の位置は、周天円上を周回する点として表現できる。したがって、天体の描くスピログラフはサイクロイドの一種である。

スピログラフの方が、包絡線図形を描くより簡単である。尽数関係にある天体のスピログラフは、安定な軌道、不安定な軌道、ともに美しい図形となる。

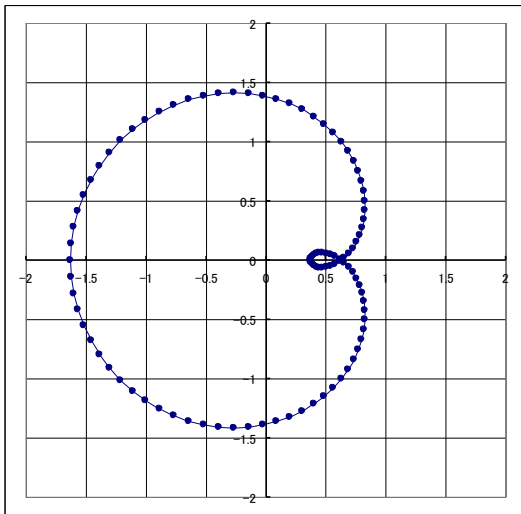
i ステップ目の内側天体 $\{x_1(i), y_1(i)\}$ に対する外側天体 $\{x_2(i), y_2(i)\}$ の相対位置は、

$$\{x_2(i) - x_1(i), y_2(i) - y_1(i)\}$$

と書ける。

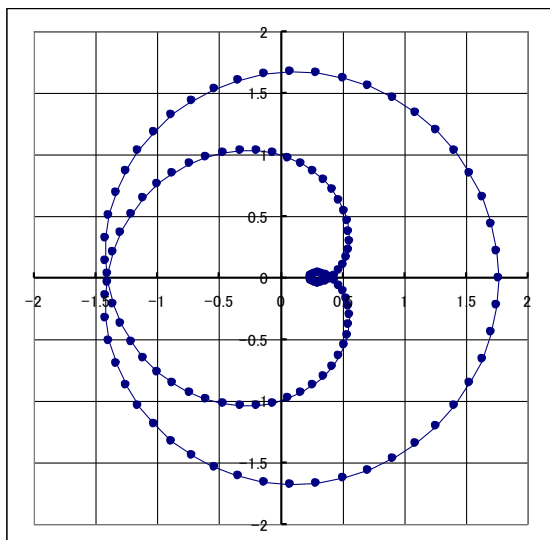
これをMSエクセルの「散布図(データポイントを折れ線でつなぐ)」を使って図示したものが、次のA図1～11である。

それぞれ、本編の図3～13に対応するものである。



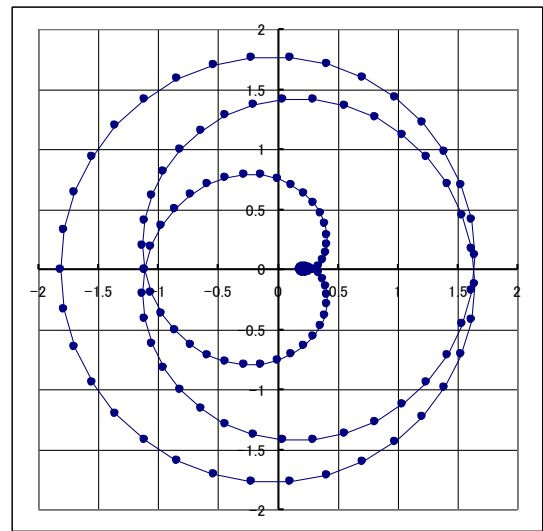
A図1. 公転周期の比 1:2 ($a_1=0.63$)

※本編の図3に対応する



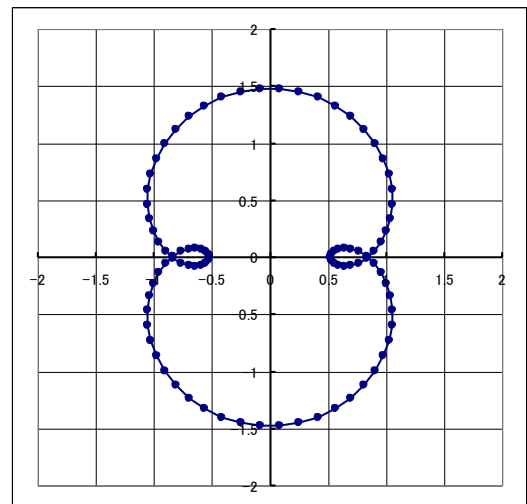
A図2. 公転周期の比 2:3 ($a_1=0.76$)

※本編の図4に対応する



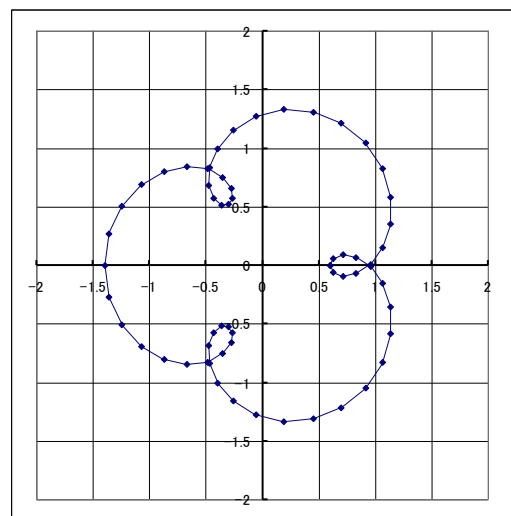
A図3. 公転周期の比 3:4 ($a_1=0.82$)

※本編の図5に対応する



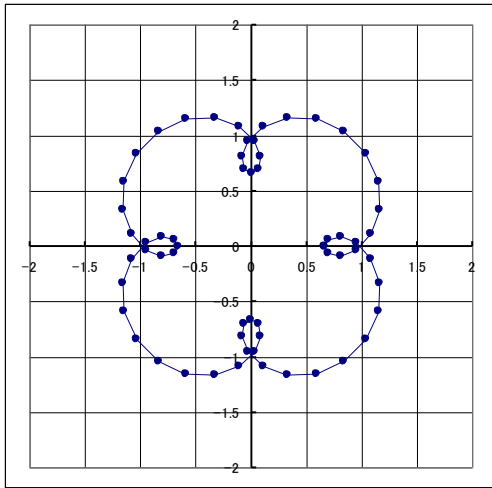
A図4. 公転周期の比 1:3 ($a_1=0.48$)

※本編の図6に対応する

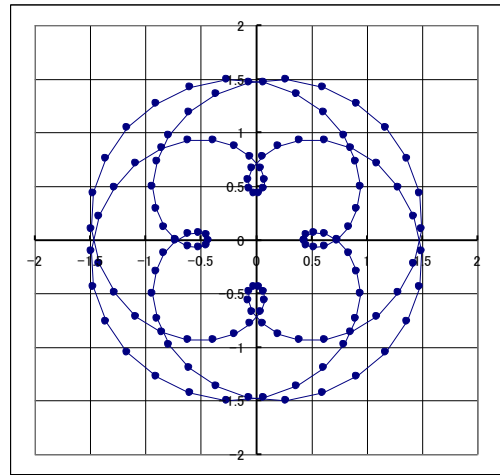


A図5. 公転周期の比 1:4 ($a_1=0.4$)

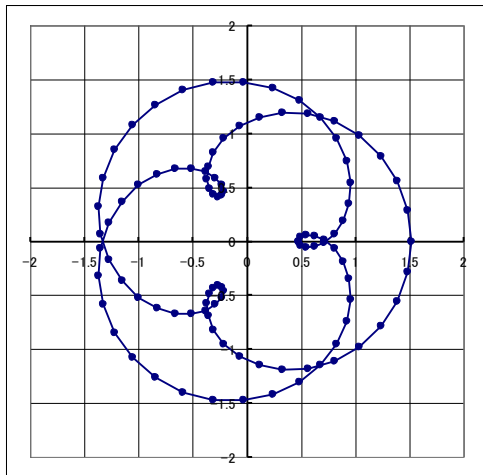
※本編の図7に対応する



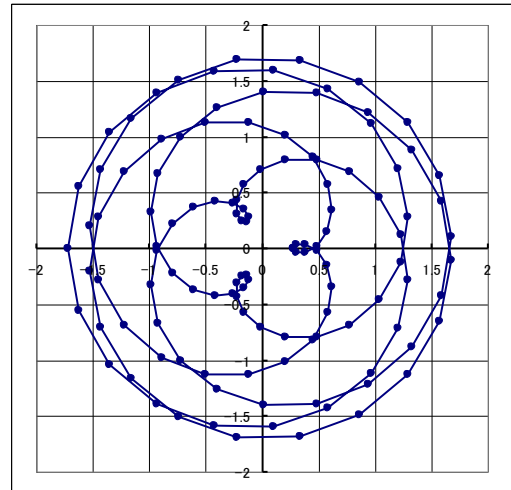
A図6. 公転周期の比 1:5 ($a_1=0.34$)
※本編の図8に対応する



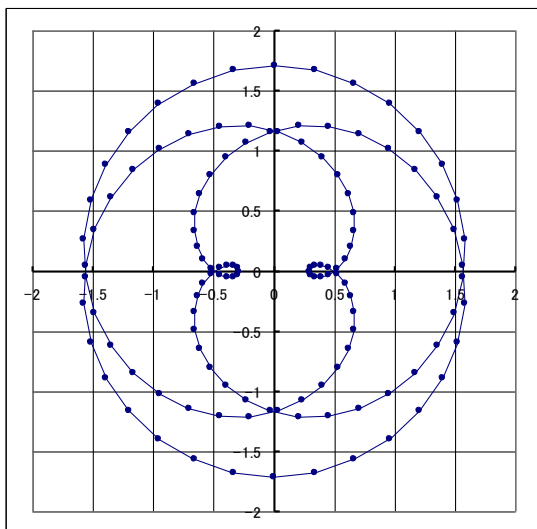
A図9. 公転周期の比 3:7 ($a_1=0.57$)
※本編の図11に対応する



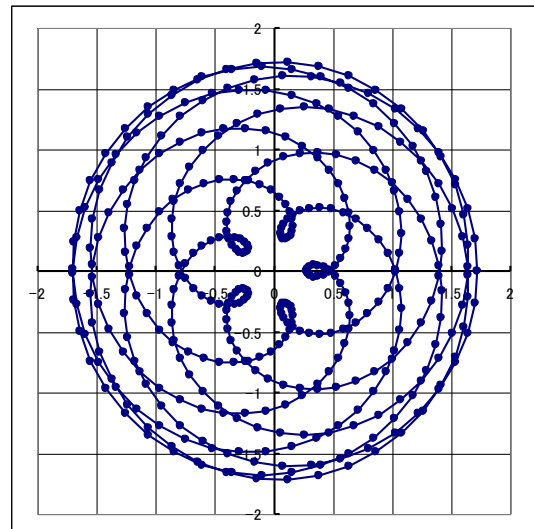
A図7. 公転周期の比 2:5 ($a_1=0.52$)
※本編の図9に対応する



A図10. 公転周期の比 5:8 ($a_1=0.73$)
※本編の図12に対応する



A図8. 公転周期の比 3:5 ($a_1=0.71$)
※本編の図10に対応する



A図11. 公転周期の比 8:13 ($a_1=0.72$)
※本編の図13に対応する