大阪市立科学館研究報告 22, 13 - 18 (2012)

天体の軌道に関する“べき乗則”について

石 坂　千 春 *

概 要

太陽系の惑星、木星系、土星系、天王星系の衛星群の公転軌道の分布には、共通する興味深い法則性が認められたので報告する。

1. はじめに

公転する天体の中には、互いの公転周期が整数比(尽数関係)になっているものがある。そうした尽数関係にある天体が描く美しい図形については[1]で報告した。ところで、この尽数関係は“ティティウス・ボーデの法則”(以下、ボーデ則)と関係はないのだろうか？

尽数関係は公転周期の関係で、ボーデ則は軌道長半径の関係なので、[1]の議論はボーデ則と直接は結びつかないだろうと予想したが、調べてみると、太陽系の惑星だけではなく、木星系、土星系、天王星系の衛星群の公転軌道の分布に共通する、興味深い法則性が認められたので報告する。

2. ティティウス・ボーデの法則について

ボーデ則(ティティウス・ボーデの法則)は、太陽系天体の軌道長半径が、簡単なべき乗式で表わされる、というものである[2]。

ボーデ則では、天体の番号を n として、その軌道長半径a_n(単位は「天文単位」)は次のような式で表わされる。

$$a_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n \quad \cdots ①$$

太陽系天体の軌道[3]とボーデ則による予測値を表1にまとめた。

天王星が1781年に発見された時、その軌道長半径がボーデ則とよく合っており、また欠番となっていたn＝3のところに1801年、小惑星(現在では準惑星に分類されている)ケレスが発見されたことで、ボーデ則はにわかに真実味を増した。

ところが、1846年発見の海王星、1930年発見の冥王星の軌道は、ボーデ則の予測からは大きく外れていた。また、水星の番号nが負の無限大(-∞)であることも、ボーデ則の物理的な意味を損ねている。

こうしたことから現在では、ボーデ則は単なる偶然の産物である、と考えられている。

ただ、公転軌道の長半径が指数関数で表わされる、というのは興味深いことである。指数関数で表わされる、すなわち“べき乗則”が成り立つような時は、何か物理的メカニズムが隠れている場合があるからだ。

そこで、次章では太陽系天体の公転軌道長半径の分布に、べき乗則が成立していないかどうか調べてみることにする。

表1　天体軌道[3]とボーデ則

天　体	長半径 a	番号 n	ボーデ則による予測値
水　星	0.387	－∞	0.4
金　星	0.723	0	0.7
地　球	1.000	1	1.0
火　星	1.524	2	1.6
ケレス	2.765	3	2.8
木　星	5.203	4	5.2
土　星	9.555	5	10.0
天王星	19.218	6	19.6
海王星	30.11	7	38.8
冥王星	39.59	8	77.2

※軌道長半径aの単位は「天文単位」; 1天文単位は地球の平均距離で約1億5000万km。

3. 太陽系天体の軌道について

3-1. 惑星の軌道

まず、表1にある各天体の軌道長半径の対数をとる。

*大阪市立科学館学芸課/中之島科学研究所
http://www.sci-museum.kita.osaka.jp/~ishizaka

底は何でもかまわないが、ここではボーデ則に合わせて 2 とした。

また、番号nは、水星を1、金星を2とし、以降、ボーデ則における番号に2を加えたものに付け直した（表2）。

これを図示したのが、図1である。

表2　新たな番号と軌道長半径の対数

天　体	新たな番号 n	長半径の対数（底2）
水　星	1	-1.37
金　星	2	-0.47
地　球	3	0.00
火　星	4	0.61
ケレス	5	1.47
木　星	6	2.38
土　星	7	3.26
天王星	8	4.26
海王星	9	4.91
冥王星	10	5.31

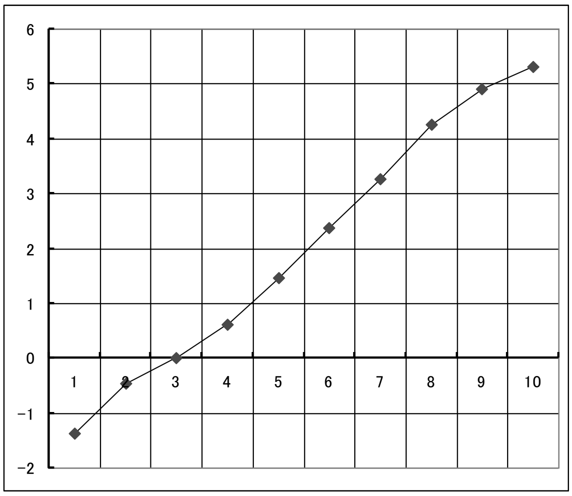

図 1　公転軌道長半径の対数（縦軸）と天体番号（横軸）の関係。ほぼ直線だが、あまりきれいな直線ではない。

「ほぼ」直線だが、あまりきれいな直線には乗っていない。すなわち、べき乗則が成立していない。

ところで、図1をよく見てみると、n＝4～8は、きれいな直線になっている。曲がっているのはn＝3とn＝9のところだけである。

そこで、表2から、n＝3およびn＝9、すなわち地球と海王星を除き、新たに連続した番号に修正してみた（表2’）。これを図示したものが図2である。見事に直線になっている。つまり、べき乗則が成立しているようだ。

表2’地球と海王星を除いた場合

天　体	番号	長半径の対数
水　星	1	-1.37
金　星	2	-0.47
火　星	3	0.61
ケレス	4	1.47
木　星	5	2.38
土　星	6	3.26
天王星	7	4.26
冥王星	8	5.31

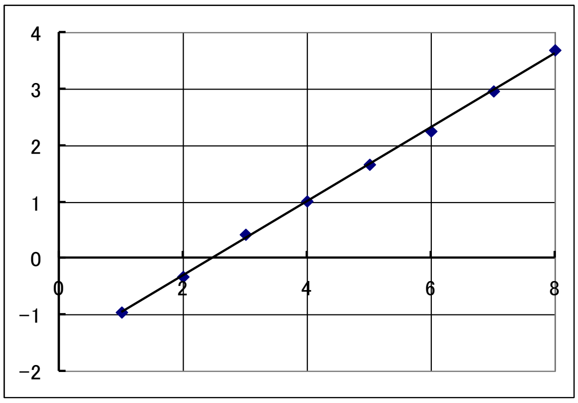

図 2　今度はきれいな直線になる！

図 2 に対し、MSエクセルの回帰分析ツールによりフィッティングを行なうと、標準誤差 0.064 で、

$$\log_2 a_n = -2.32 \times 0.944n \quad \cdots ②$$

となった。

図2では、べき乗則が成り立っていることが見て取れるが、その回帰式②はボーデ則の式①と比べてあまり美しくない。

だが、式②を指数関数に戻してみると、実は次のように近似できる。

$$a_n = 0.2 \times 7^{\frac{n}{3}} \quad \cdots ③$$

式③はボーデ則の式①と比べて遜色ないほど美しい形をしている、と言えるのではないだろうか。

表3に、式③による軌道長半径の予測値を記載する。除外した地球と海王星については、予測値が実際の長半径と同じになるように、番号を逆算して斜体で記している。地球と海王星の番号はそれぞれ2.5、7.7であった。

外側の天体ほど誤差が大きくなるが、冥王星でもその誤差は9%程度である。

なお、地球と海王星がべき乗則からずれている理由については、4章で考察する。

表3　べき乗則（式③）による予測値

天　体	長半径	番号	式③の値
水星	0.387	1	0.38
金星	0.723	2	0.73
地球	1.000	*2.5*	*1*
火星	1.524	3	1.4
ケレス	2.765	4	2.7
木星	5.203	5	5.1
土星	9.555	6	9.8
天王星	19.218	7	18.8
海王星	30.11	*7.7*	*30*
冥王星	39.59	8	35.9

3-2. 木星系

木星は多数の衛星を従えており[4]、ミニチュアの太陽系といった面持ちである。では、木星の衛星群には、3.1節で見たような法則は成立しているだろうか。

文献[4]に挙げられている64個の衛星に、内側から番号を振ったものが図3である。

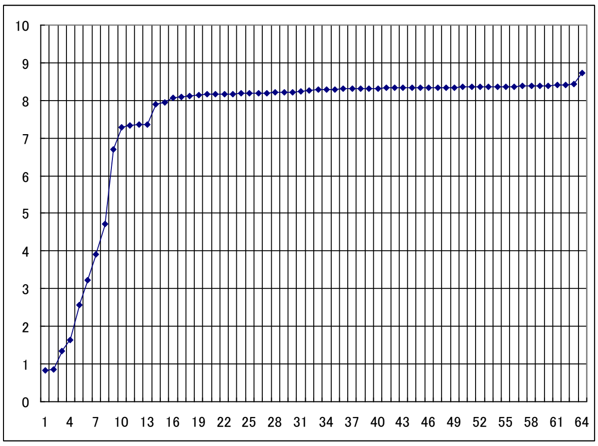

図3　木星の64個の衛星の番号（横軸）に対する軌道長半径の対数（縦軸）をプロットした。

表4　木星系の主な衛星の軌道長半径

衛　星	長半径	番号	式④の値
アマルテア	0.17	1	0.16
イ　オ	0.39	3	0.40
エウロパ	0.63	4	0.63
ガニメデ	1.00	5	1.0
カリスト	1.76	6	1.6
ヒマリア	10.7	10	10.2

※長半径はガニメデの軌道を「1」とした。イオ、エウロパ、ガニメデ、カリストは衛星としては非常に大きく、発見者の名前から「ガリレオ衛星」と呼ばれている。

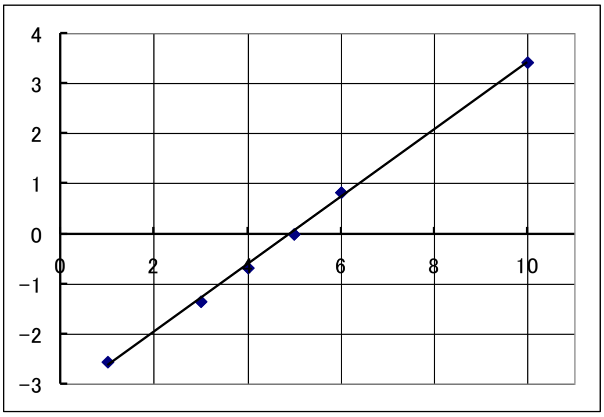

図4　木星系の主な衛星（表4）についての、軌道長半径（縦軸）と番号（横軸）の関係。

図3で、番号だけが増えて長半径がほとんど変わらないところがある。これらの衛星は「群」を形成している。「群」は、出自や物理的状態を一にする小型の衛星集団である。

今回の分析では群の扱いが少し難しいため、質量が10^{18}kg以上の主な衛星（表4）だけを取り上げ、解析を行なった（図4）。

図4から太陽系天体（3.1節の図2）と同様、木星系にもべき乗則が成立し、直線上に乗るようだ。近似式は④である。

$$a_n = 0.1\times 4^{\frac{n}{3}} \qquad \cdots ④$$

3-3.　土星系

土星もまた60余個の衛星を従えている[4]。木星系の場合と同様に、質量が10^{18}kg以上の主な衛星（表5）について考察した。

表5　土星系の主な衛星の軌道長半径

衛　星	長半径	番号	式⑤の値
ヤヌス	0.12	1	0.13
ミマス	0.15	2	0.16
エンケラドス	0.19	3	0.20
テチス	0.24	4	0.25
ディオネ	0.31	5	0.32
レア	0.43	6	0.40
タイタン	1.00	10	1.01
ヒペリオン	1.21	11	1.27
イアペトス	2.91	15	3.2
フェーベ	10.5	20	10.2

※長半径はタイタンの軌道を「1」とした。
※フェーベは軌道傾斜角173度の逆行衛星。

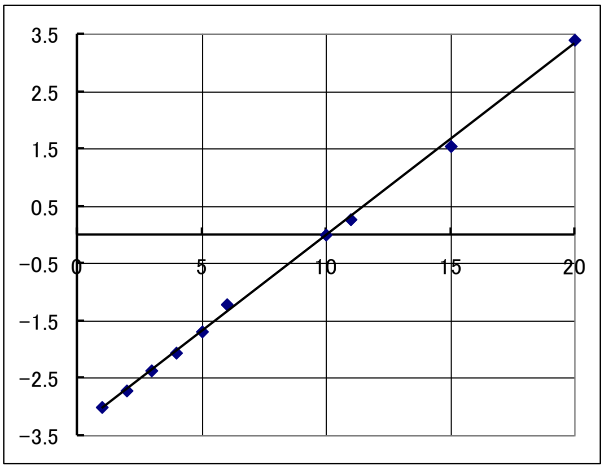

図5　土星系の主な衛星（表5）についての、軌道長半径（縦軸）と番号（横軸）の関係。

図5のように、土星系の主な衛星に対しては式⑤が成立する。

$$a_n = 0.1 \times 2^{\frac{n}{3}} \qquad \cdots ⑤$$

3-4. 天王星系

天王星は公転面に対して自転軸が97.9度も傾いた異色の惑星であるが、その傾いた赤道面に沿って、やはり多数の衛星が存在する[4]。

天王星系でも、質量が10^{18}kg以上の主な衛星（表6）について解析を行なったところ、下記⑥式のような、べき乗則が成り立つことが分かった（図6）。

$$a_n = 0.1 \times 3^{\frac{n}{3}} \qquad \cdots ⑥$$

表6　天王星系の主な衛星の軌道長半径

衛　星	長半径	番号	式⑥の値
ポーシャ	0.15	1	0.14
パック	0.20	2	0.21
ミランダ	0.30	3	0.30
アリエル	0.44	4	0.43
ウンブリエル	0.61	5	0.62
タイタニア	1.00	6	0.90
オベロン	1.34	7	1.30
シコラクス	27.9	15	24.3

※長半径はタイタニアの軌道を「1」とした。
※シコラクスは軌道傾斜角150度の逆行衛星。

なお、式⑥の予測からはずれているシコラクスは軌道が約150度も傾いた逆行衛星であり、離心率は0.52と扁平な軌道を取っている。

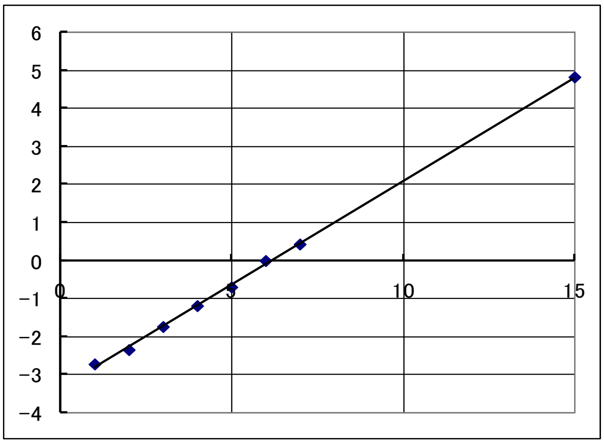

図6　天王星系の主な衛星（表6）についての、軌道長半径（縦軸）と番号（横軸）の関係。

4. 考察

第3章では、太陽系の惑星および準惑星（冥王星、ケレス）、木星系の衛星、土星系の衛星、天王星系の衛星で、公転軌道の長半径が簡単な指数関数で表わせることを見てきた。

興味深いのは、式③、④、⑤、⑥の指数が、すべて「n/3」であることである。

ケプラーの第3法則「公転軌道の長半径の3乗は、公転周期の2乗に比例する」を思い出せば、第3章で見てきた軌道長半径のべき乗則を、公転周期のべき乗則に変換することができる。

式で書き表すと、公転周期Tの場合は指数が「n/2」となり、

$$T_n \propto 7^{\frac{n}{2}} \qquad （太陽系）$$

$$T_n \propto 4^{\frac{n}{2}} = 2^n \qquad （木星系）$$

$$T_n \propto 2^{\frac{n}{2}} \qquad （土星系）$$

$$T_n \propto 3^{\frac{n}{2}} \qquad （天王星系）$$

となる。木星系の衛星の公転周期が2^nに比例することは、[1]で報告したように、イオ：エウロパ：ガニメデが1：2：4の尽数関係になっていることと整合する。また、太陽系天体のべき乗則③の底は7であるが、7の平方根が2.5に近いことは、[1]で見たように、隣り合う太陽系惑星の公転周期の比に2：5の尽数関係が多いことと関連しているであろう。天王星系では、ウンブリエル：タイタニアが1：2の尽数関係、ポーシャ：パック：ミランダ：アリエルがほぼ5：9、アリエル：ウンブリエルがほぼ3：5、タイタニア：オベロンがほぼ2：3で、各周期の比は

平均すると3の平方根に近い約1.767となる。土星系については[1]を参照されたい。

つまり、ボーデ則と尽数関係とは関係ないだろうという当初の予想に反し、“新しいボーデ則”(べき乗則)は天体同士の尽数関係と関連があったのである。

そして、すべての系で似たようなべき乗則が成立することは、太陽系天体および衛星系を支配する共通の作用があることを示唆しているのではなかろうか。

この考え方が正しければ、惑星形成シミュレーションの結果や、系外惑星系[5]の公転軌道についても、同様のべき乗則が成り立つことが予想される。

そこで、文献[5]に挙げられている系外惑星系のうち、5個以上の惑星を持っている、Kepler-11、55Cnc、HD10180、Kepler-20星系について、3章と同様の回帰解析を行なってみたが、軌道長半径の分布は、指数[n/3]のべき乗では、うまく再現できなかった(※惑星形成シミュレーションの結果については、あいにくデータを持ち合わせていないので、どなたか、ご教示いただければありがたく思う)。

3.1節では、地球と海王星の番号nが整数ではなく小数になっていることを見た。また、衛星系でも「群」は多くの場合、番号が小数となる。

なぜ、地球や海王星、衛星の「群」、そして系外惑星系は、指数[n/3]のべき乗則からずれているのだろうか?

惑星は他の惑星と重力的な影響を及ぼし合い、形成された場所から移動していく、という考え方がある[6]。系外惑星で、中心星の近くにホットジュピターと呼ばれる巨大なガス惑星が多く見つかっていることも、「惑星が外側から移動してきた」として説明されている。

太陽系の場合も形成時、最も大きな惑星である木星の影響により、小惑星や火星が内側へ、土星や天王星が外側へ移動しただろう。

これは食べ放題の立食パーティ会場に大食い男が紛れ込んだ状況と似ている。この男の近くのテーブルからは食べ物がいち早く無くなるので、近くの人は別のテーブルに移動しなければならない。そして、そのテーブルにいた客は押し出されるように、さらに別のテーブルに移動する。男から遠いテーブルでは、まだ豊富に食べ物があり影響は少ないが、じょじょに人が集まってくるだろう。そして食べ物が全て無くなれば、人々の移動も止まる。

惑星軌道の変更も木星から離れた惑星に玉突きのように伝わっていくが、地球や海王星の移動が完了する前に、なんらかの理由で惑星移動のプロセスが終了してしまった、とすれば、地球と海王星がべき乗則からずれていることを説明できるかもしれない。

惑星が移動するためには、公転の軌道角運動量を輸送する媒体が必要である。

軌道角運動量を運ぶのは主にガス成分である。太陽系形成期に原始太陽を中心として形成されていた原始惑星系円盤(降着円盤)が、太陽の成熟とともに、ある時期に失われ、その時点で惑星移動が終了する。

衛星系で「群」がべき乗則からずれているのも、これらの群がその場で形成されたのではなく、惑星によって捕獲されたものだとすると説明できるだろう。捕獲された段階で、原始衛星系に存在していたガス成分が無くなっており、再配置がされなかったのだ。

系外惑星系でも、惑星の再配置がまだ進行中のため、指数[n/3]にそろっていないのだと解釈できるのではないだろうか。

惑星系および衛星系に成り立つべき乗則と、そのずれは、形成の歴史を教えてくれているのかもしれない。

※補遺

本稿は「天文教育」2012年3月号に掲載されたが、投稿後、第4章で考察した衛星系の公転周期のべき乗則については先行研究が存在することが判明した。1968年、1969年に発表された「ダーモットの法則」である[7]。

ダーモットの法則では、

$$T_n = 0.444 \times 2.03^n \quad \text{(木星系)}$$

$$T_n = 0.462 \times 1.59^n \quad \text{(土星系)}$$

$$T_n = 0.488 \times 2.24^n \quad \text{(天王星系)}$$

とされており、やはり尽数関係(軌道共鳴)との関連が指摘されている。

参考文献

[1]石坂千春,天文教育2011年7月号,p34

[2] M. Hoskin (1992), http://www.astropa.unipa.it/HISTORY/hoskin.html

[3]国立天文台編,理科年表(2011),p78,丸善2011年

[4]http://www.dtm.ciw.edu/users/sheppard/satellites/

[5]http://exoplanet.eu/

[6]J.C.B.Papaloizou & C. Terquem(2006), Rep. Prog. Phys. Vol.69, p119

[7]http://en.wikipedia.org/wiki/Dermott%27s_law