

ベクトル表記による光の反射・屈折の法則

長谷川 能三*

概要

光の反射や屈折の法則についてはよく知られているが、通常は入射光と反射光や入射光と屈折光を含む平面内での図を用いて入射角と反射角や屈折角の関係が示されている。しかし気象光学現象では、この面を考えることが難しい場合があり、そのため、現象の見え方が直感的にわかりにくいことがある。

そこで、光の反射や屈折の法則をベクトルで表記するとどのようになるかを示し、その計算例として気象光学現象の幻日環や環天頂アークに適用した。その結果、これらの現象が一定の高さに見えることが簡単にわかるようになった。

1. はじめに

物質の境界面における光の屈折や反射について、入射角と反射角や屈折角の間には、図1および図2のように示される関係がある。ここで、この図の描かれている面は、入射光と、入射光が境界面にあった位置での境界面の法線(以下、単に境界面の法線とする)を含む平面であり、反射光や屈折光も、この平面内にある。

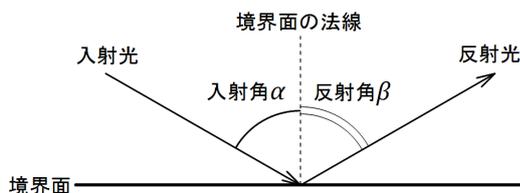


図1. 反射の法則

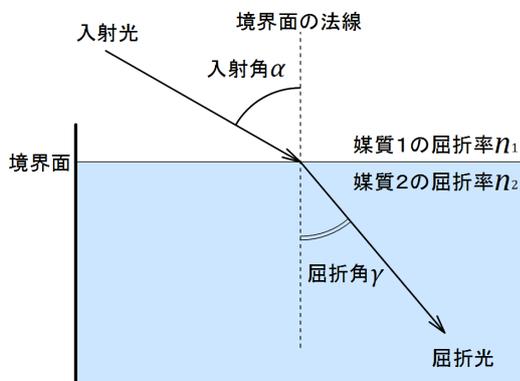


図2. 屈折の法則

反射の法則は、図1のように、入射角 α と反射角 β が等しいというものである。ここで、入射角 α および反射角 β は、図に示したとおり入射光および反射光と境界面の法線との間の角である。

一方屈折の場合には、図2の入射角 α と屈折角 γ の間には、スネルの法則で示される次の関係がある。

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma \quad \dots(1)$$

ここで、 α と γ は入射角および屈折角で、それぞれ入射光および屈折光と境界面の法線との間の角である。また n_1 と n_2 は、入射光が通っている部分の媒質(媒質1)の屈折率と、屈折光が通っている部分の媒質(媒質2)の屈折率である。

水面のように媒質の境界面が水平である場合などは、図1や図2に示している面内で入射角や反射角、屈折角を考えることは容易である。しかし、気象光学現象では、空中にある六角柱形の氷の結晶などを取り扱う。そのため、境界面が水平や垂直であるとは限らない。また、境界面が垂直な場合であっても、この境界面とも水平面とも直交する面内に入射光が含まれるとは限らない。このため、図1や図2のような面を考えることは難しい場合が多い。

2. 反射の法則のベクトル表記

反射の法則をベクトル表記するために、まず、必要な3つのベクトルを定義する。入射光の進行方向の単位ベクトル(以下、入射光ベクトル)を \mathbf{i} 、反射光の進行方向の単位ベクトル(以下、反射光ベクトル)を \mathbf{r} 、

*大阪市立科学館 学芸員
中之島科学研究所 研究員
hasegawa@sci-museum.jp

境界面の法線で境界面から入射光や反射光がある媒質側へ向かう方向に取った単位ベクトル(以下、境界面の法線ベクトル)を \mathbf{c} とする(図3)。

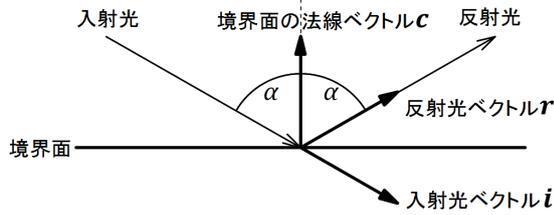


図3. 反射の法則に関わるベクトル

すると、 $-\mathbf{i} + \mathbf{r}$ は \mathbf{c} と同じ向きで、その大きさは $2 \cos \alpha$ となる。このことから、入射光ベクトル \mathbf{i} と反射光ベクトル \mathbf{r} と境界面の法線ベクトル \mathbf{c} との間には、

$$-\mathbf{i} + \mathbf{r} = 2(-\mathbf{i} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c} \quad \dots (2)$$

の関係がある。これより、反射光ベクトル \mathbf{r} は \mathbf{i} と \mathbf{c} を用いて、

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - 2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c} \quad \dots (3)$$

と表わすことができる。これがベクトル表記による反射の法則である。

3. 屈折の法則のベクトル表記

反射の法則と同様に、入射光ベクトルを \mathbf{i} 、屈折光の進行方向の単位ベクトル(以下、屈折光ベクトル)を \mathbf{r} 、境界面の法線ベクトルを \mathbf{c} とする。

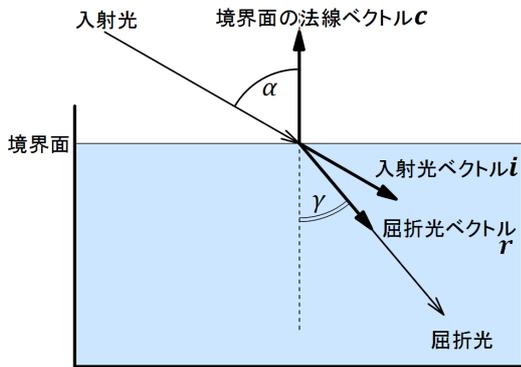


図4. 屈折の法則に関わるベクトル

すると、スネルの法則より、

$$n_1(\mathbf{i} \times \mathbf{c}) = n_2(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \quad \dots (4)$$

の関係がある。しかし、ここから屈折光ベクトル \mathbf{r} を簡単に求めることはできない。

そこで、入射光が境界面の法線ベクトル \mathbf{c} と直交する2つの単位ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} を考える。ここで、 \mathbf{b} は \mathbf{c} と \mathbf{i} を含む面内にあり、 \mathbf{a} は \mathbf{b} ととも直交し、それぞれ向きは図5に示すように取る。

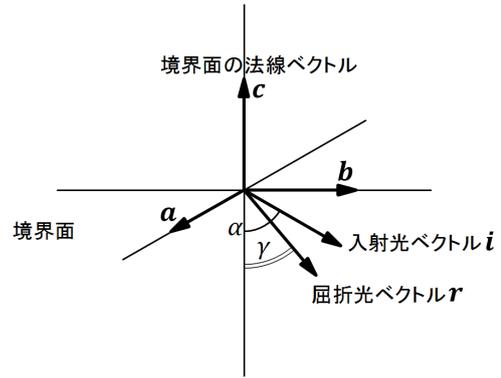


図5. 屈折の法則を考えるための直交単位ベクトル

これより、屈折光ベクトル \mathbf{r} は、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} と屈折角 γ を用いて、

$$\mathbf{r} = \sin \gamma \mathbf{b} - \cos \gamma \mathbf{c} \quad \dots (5)$$

と表わすことができる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{c} \times \mathbf{a} \\ &= \mathbf{c} \times \left(\frac{1}{\sin \alpha} \mathbf{i} \times \mathbf{c} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \{ (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{i} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{c} \} \\ &= \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{\sin \gamma} \{ \mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c} \} \quad \dots (6) \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\mathbf{i} \cdot \mathbf{c} \\ \sin^2 \alpha &= 1 - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c})^2 \\ \sin^2 \gamma &= \frac{n_1}{n_2} \{ 1 - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c})^2 \} \\ \cos \gamma &= \sqrt{1 - \left\{ \frac{n_1}{n_2} \right\}^2 \{ 1 - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c})^2 \}} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

である。これより屈折光ベクトル \mathbf{r} は、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{n_1}{n_2} \{ \mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c} \} - \sqrt{1 - \left\{ \frac{n_1}{n_2} \right\}^2 \{ 1 - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c})^2 \}} \mathbf{c} \\ &= \frac{n_1}{n_2} \mathbf{i} - \frac{n_1}{n_2} \left\{ (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c}) + \sqrt{\left\{ \frac{n_2}{n_1} \right\}^2 - 1 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c})^2} \right\} \mathbf{c} \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{i} - \frac{1}{n} \left\{ (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c}) + \sqrt{n^2 - 1 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c})^2} \right\} \mathbf{c} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

となる。ここで n は媒質1に対する媒質2の比屈折率(以下、単に屈折率)で、 $n = n_2/n_1$ である。反射の法則のベクトル表記と比べると複雑だが、屈折光ベクトルを入射光ベクトル、境界面の法線ベクトル、屈折率で表わすことができた。ただし、 $n^2 - 1 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c})^2 < 0$ の場合には全反射となり、屈折光は存在しない。

4. 気象光学現象の計算例

4-1. 幻日環

幻日環（げんじつかん）は、太陽と同じ高さで空を一周する白い筋が見られる現象である。



写真1. 幻日環

幻日環は、六角板状の氷の結晶が、六角形の面を水平にしている場合に、太陽の光が氷の結晶の側面で反射されることで見えるとされている。

ここで六角形の面が水平であるので、側面は鉛直になっている（その法線ベクトルは水平である）が、どちらの方角を向いているかは決まっていない。このような側面で光が反射されるのであるから、鏡の面を垂直に保ったまま水平方向の向きを変えていったとき、反射した光はどのように進むかという問題に帰着する。

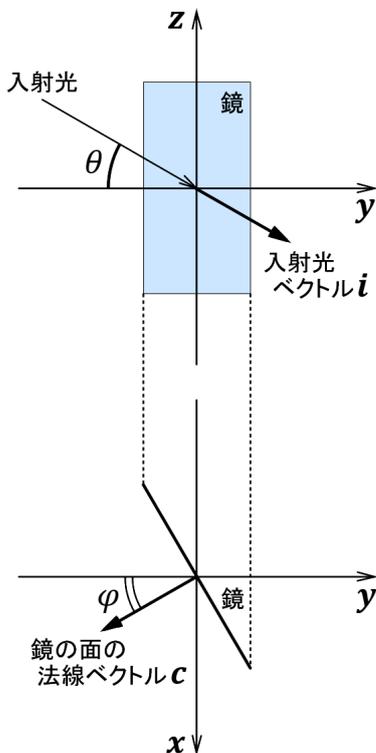


図6. 入射光と鏡の位置関係
（上が正面から、下が上から見た図）

そこで、太陽の高度を θ 、鏡の法線ベクトルの方位を φ とすると、入射光ベクトル \mathbf{i} と境界面（鏡の面）の法線ベクトル \mathbf{c} は、

$$\mathbf{i} = (0, \cos \theta, -\sin \theta) \quad \dots (9)$$

$$\mathbf{c} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) \quad \dots (10)$$

と表わされる。

すると、(3)式のベクトル表記した反射の法則より、反射光ベクトル \mathbf{r} は、

$$\begin{aligned} r_x &= 0 + 2 \cdot \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \cos \theta \sin 2\varphi \\ r_y &= \cos \theta - 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \varphi \\ &= \cos \theta \cos 2\varphi \\ r_z &= -\sin \theta \end{aligned} \quad \dots (11)$$

となる。

反射光ベクトル \mathbf{r} は単位ベクトルであり、その z 成分が φ によらないことから反射光の俯角は一定であることがわかり、しかも入射光と同じ θ である。また、その方位角は、鏡の面の方位角の2倍の角度となっていることがわかる。これらのことは、それぞれ $\varphi = 0$ の場合や $\theta = 0$ の場合に成り立つことは直感的にわかる。しかし、反射の法則のベクトル表記を用いて計算することで、 $\theta \neq 0$ かつ $\varphi \neq 0$ の場合にも成り立つことが、簡単に明らかになった。

なお、空全体にこのような氷の結晶が多数あり、氷の結晶で反射された光の俯角が太陽の高度と同じ角度でさまざまな方位を向いている場合、地上にいる観測者からは全方位で太陽と同じ高度から反射光が来ているのを見ることになる。これはつまり、太陽と同じ高度で空を一周する輪として見える。

4-2. 環天頂アーチ

環天頂（かんでんちょう）アーチは、太陽の高度が低い時に、太陽のずっと上の方に逆さまになった虹のように見える現象である。



写真2. 環天頂アーチ

環天頂アーキは、幻日環と同じように、六角板状の氷の結晶が六角形の面を水平にしている場合に見られる現象である。ただ、環天頂アーキの場合は、太陽の光が氷の結晶の上面から屈折して結晶の中に入り、側面から出ていった光によって見える。

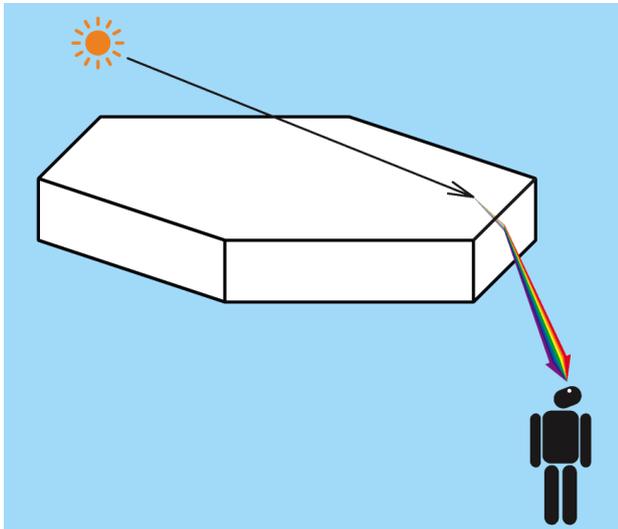


写真3. 環天頂アーキになる光の経路

ここで、氷の結晶の六角形の上面は水平であるため、上面で入射する場合の屈折については、側面がどちらの方角を向いていても関係がない。そこで、上面から氷の結晶の中に入った後の太陽の光の俯角を θ 、側面の法線ベクトルの方位を φ とする。すると、氷の結晶の中から結晶の側面にあたる入射光ベクトル \mathbf{i} と、側面の法線ベクトル \mathbf{c} は、幻日環の場合と同様に、

$$\mathbf{i} = (0, \cos \theta, -\sin \theta) \quad \dots (12)$$

$$\mathbf{c} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) \quad \dots (13)$$

と表わされる。

これを用いて(8)式のベクトル表記した屈折の法則より、氷の結晶の側面から出て行く屈折光ベクトル \mathbf{r} を計算すればよいのであるが、簡単な計算で、

$$r_z = -\frac{1}{n} \sin \theta \quad \dots (14)$$

であることがわかる。幻日環の場合と同様、屈折光ベクトル \mathbf{r} は単位ベクトルであり、その z 成分が φ によらないことから、屈折光の俯角は φ によらず一定であることが明らかである。つまり、環天頂アーキも、幻日環と同じように、高度一定で見えているのである。但し、その俯角は、式(14)から計算する必要がある。

しかし、実際に環天頂アーキを見上げると、虹を逆さまにしたような形、つまり、まん中が低く、両端が高くなっているように感じる。ところが、天頂を中心にして環天頂アーキを撮影してみると、確かに天頂を中心とした円弧になっており、高度一定であることがわかる。



写真4. 天頂を中心に撮影した環天頂アーキ

また、環天頂アーキがどのくらいの角度の広がりがあるかは、全反射にならない条件から計算することができる。例えば、太陽の高度が15度の場合、式(12)の入射角は $\theta = 42.4^\circ$ 、また氷の屈折率が1.309であるので、 $n = 1/1.309$ とする。式(8)が全反射を起こさない角度の範囲は、

$$n^2 - 1 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{c})^2 > 0$$

$$n^2 - 1 + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi > 0$$

$$\cos^2 \varphi > \frac{1 - n^2}{\cos^2 \theta} \quad \dots (15)$$

となる。これより、 $-29.0^\circ < \varphi < 29.0^\circ$ の範囲のときには全反射とならずに環天頂アーキとなる屈折光が出てくる。ここで、全反射とならないぎりぎりの場合には屈折光は境界面に沿って出てくることから、屈折光の方位は入射光に対して $\pm 61.0^\circ$ の範囲であり、環天頂アーキの広がり、計算上、天頂を中心に122度となることがわかる(実際には端の方は淡いため、おそらくここまでの広がりとしては見えない)。

5. 考察

このベクトル表記による反射の法則・屈折の法則は、どんな場合にもでも便利なわけではない。気象光学現象の中でも、虹は球形の水滴による現象であり、光がどこにあたるかによって境界面の法線ベクトルの向きが異なるので、この計算方法には向かないかもしれない。しかし、平面で囲まれた氷の結晶による気象光学現象の場合には、例のように簡単な計算で物理的イメージが掴み易くなる場合があり、この計算方法が有効である。

また、入射光や境界面の法線ベクトルが、複数のベクトルの演算で与えられるような場合にも、ベクトルの公式である程度計算を進められる場合も考えられる。

ただ、反射の法則は比較的簡単な式であるが、屈折の法則は式が複雑であるところが少し難点である。