

電磁気学を正しく理解するために

高橋 憲明 *

概要

電磁気学は力学、熱学と並んで古典物理学の根幹を成すが、難しいためか、誤解や曲解が随所に見られる。本稿では、電磁場の伝播を中心に、基本となる Maxwell 方程式が教えるものを見る。磁場の時間変化が電場をつくり、電場の時間変化が磁場をつくりつつ伝わると高校教科書に書かれているが、実際その通りである。点電荷の周りの静電場や定常直線電流の周りの磁場は、点電荷や、電流から直接伝播していくものではなく、場の生成時の電流、電荷の変化によってつくられたものであることを認識しよう。伝播に必要なエネルギー密度の流れは Poynting ベクトルとして記述される。

1. はじめに

コンデンサーの極板間に生じる磁場を測定した方がおられた。この測定の目的は極板間で変位電流が磁場をつくるかどうかを調べようとされたものである¹⁾。この方法に関して、極板を流れる伝導電流がつくった磁場であって、変位電流の寄与ではないとの論評が見られる²⁾。本当なのだろうか。ここでは周知の事柄に関してではあるが、電磁気学を勉強するときに思い違いが起ることのないように、一言書いてみたい。

2. 静電場、静磁場

電磁気学の最初に、静電荷 q が Coulomb の法則で表される静電場 E をつくるか、定常電流 I が Biot-Savart の法則に従ってその付近に静磁場 B をつくるか書かかれていたりする。例えば、Coulomb の式

$$E = q/4\pi\epsilon_0 R^2 \quad (1)$$

や、直線定常電流の周りの磁場

$$B = \mu_0 I/2\pi R \quad (2)$$

はそれぞれ点電荷がつくる静電場、直線電流がつくる静磁場で、これらは空間を伝わって広がってゆくと記述されたりする。Biot-Savart の法則に関しても然り。こ

こで

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2 \quad (3)$$

で、 c は真空中の光速である。

考えてみるまでもなく、上の記述は大きな誤解を招きかねない。これらの法則は Maxwell の方程式が完成する前に、電磁気現象の本質に迫るべく発見、整理されたものである。今日でも、静電気、静磁気の定量的な記述になくはならぬものである。しかし、これらを数式化したとき、静電荷が静電場を、また定常電流が静磁場を生成する記述であると誤解してはならぬことは言うに及ぶまい。

3. 電磁場の表し方

3-1. 基本方程式

それではどのようにして電場、磁場が生成されるのか、もう一度思い出そう。空間のある点に電荷が持ち込まれたとする。もちろん電流が流れて電荷量に変化が起きる。この変化が電磁場として空間を伝える。電荷や電流のない空間部分では、磁場の時間変化が電場の空間の変化(回転)をつくり出し(電磁誘導)、電場の時間変化(変位電流)が磁場の回転を生成しつつ、伝播する。このあたり、高等学校の物理教科書の中で記述されているとおりである。変化が終わり定常となったところで、場は時間因子を含まない Maxwell の方程式の解である Coulomb の法則や Biot-Savart の法則を満たす静電場、静磁場となる。静電場、静磁場

*中之島科学研究所 所長

といえども電荷、電流が直接つくり出した(ている)のではなく、電場や磁場の時間変化が磁場や電場をつくりつつ空間を伝わった結果なのであることを認識する必要がある。

これらを記述する基本は Maxwell の方程式で、真空中の電場 \mathbf{E} 、磁束密度 \mathbf{B} を電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} を使って、

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0 \quad (6)$$

$$(1/\mu_0) \operatorname{rot} \mathbf{B} - \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t = \mathbf{j} \quad (7)$$

と書く。左辺には場の量が、右辺には源を表す量(電荷密度や電流密度)が置かれている。Newton の運動法則とともに古典物理学の根幹をなす方程式である。(4)、(5) はそれぞれ電気、磁気に関する Gauss の法則と呼ばれる。点電荷の周りの静電場の表式や磁荷が単独では存在しえないことを説明するのに有効であるが、自由空間の電磁波が横波であることを示すのもこれらの法則である。(6) は電磁誘導を表し、(7) は Ampère-Maxwell の法則と呼ばれ、伝導電流と変位電流が同じ資格を有することを示すことから、電磁気学の多様性を示す法則であることが理解できよう。

この方程式群で物理学における近接作用がはじめで導入された。遠隔作用の形で表された Coulomb の法則や Biot-Savart の法則を見ていると、静電荷が静電場を、また定常電流が静磁場をつくり出すように思えるかも知れないが、そうではない。例えば、最近よく話題になる Jefimenko の式³⁾で位置 \mathbf{r} 、時刻 t における磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ を表すと

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = & (\mu_0/4\pi) \int d\mathbf{r}'^3 [\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) + \\ & d/dt \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c] \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 \end{aligned} \quad (8)$$

や

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & (1/4\pi\varepsilon_0) \int d\mathbf{r}'^3 [\{\rho(\mathbf{r}', \tau) + \\ & d\rho(\mathbf{r}', \tau)/dt |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c\} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 \\ & - d\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau)/dt/c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] \end{aligned} \quad (9)$$

となる。これらは Maxwell の方程式の解である。ここで

$$\tau = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \quad (10)$$

で、源が分布する各点からの距離に応じて伝播する時間が異なるので、そのことが表現されている。これらの式を見ると、 \mathbf{r}' にある源の量を距離やその平方に相当する量で割算したものを積分した形で書かれている。源の影響が光速で伝わって行く記述と見て取れるが、この伝播項は、影響が伝わるためには、磁場の変化が電場をつくり、電場の変化が磁場を生成すると言った上述の Maxwell 方程式に対応する過程を含んでいることを、見落としてはいけない。そうすると、式に含まれる ε_0 と μ_0 から (3) の関係で光速で伝播することも納得できよう。Jefimenko の式から電場、磁場の源は ρ と \mathbf{j} であるという主張がなされることがあるが³⁾、これらは Maxwell 方程式の解の一つであるにすぎず⁴⁾、別の表現もまた可能である。繰り返して言うが、静電場、静磁場でなくとも、電荷や電流が離れた場所に直接場をつくるのではない。その伝播の過程で、電磁誘導が起きるとともに、変位電流が磁場をつくる。

3-2. ポテンシアル

電磁場をポテンシアルで表すこともよく行われる。ポテンシアルには任意性があるが、一義的に定まるものではないが、電磁場のポテンシアルには2種あって、 ϕ をスカラーポテンシアル、 \mathbf{A} をベクトルポテンシアルと呼んでいる。 ϕ や \mathbf{A} が分かればその微分から、 \mathbf{B} や \mathbf{E} は

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (11)$$

および

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t \quad (12)$$

で求められるから便利である。例えば \mathbf{A} は次の方程式から求めることができる。

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (13)$$

ここで、 \square はダランベールシアンと呼ばれ、

$$\square = \partial^2/c^2 \partial t^2 - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial z^2 \quad (14)$$

で、時間に関する2階の偏微分から x, y, z に関する2階の偏微分を引き去った演算子である。ただし、次

元を合わせるため時間は ct の形で表される。

変位電流が磁場をつくらないことの説明にベクトルポテンシャルが満たすこの式がよく引きあいに出される。すなわち、ベクトルポテンシャルを決定する方程式には変位電流は含まれず、電流密度のみが源となっている。一見そのようだが、この式は Lorentz ゲージで書かれたもので、ポテンシャルの任意性から別のゲージを取ると、変位電流密度が源のように書かれることもある。いずれにせよポテンシャルのものは、Maxwell の式でその (7) では変位電流が伝導電流と同じ資格を持つことが書かれていることを忘れてはならない。

3-3. 空間を伝えるエネルギー

さらに、Maxwell の方程式から出発して、式 (7) と \mathbf{E} のスカラー積をとり、式 (6) と \mathbf{B}/μ_0 のスカラー積をとって両式の引算をすると、

$$(1/\mu_0) \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\partial w / \partial t \quad (15)$$

が得られる。ここで、 w は電場磁場のエネルギー密度である。

$$w = \{(1/2)\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + (1/2\mu_0)\mathbf{B}^2\} \quad (16)$$

その減少を見ると、Joule 熱をのぞいた分はその点から伝わり去るエネルギー密度の流れに相当している。逆に、電場や磁場をつくり出すには電磁波のエネルギーに相当する流れが必要である。(14) 式左辺に含まれる

$$\mathbf{S} = (1/\mu_0)\mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (17)$$

は Poynting ベクトルと呼ばれ、その大きさは

$$|\mathbf{S}| = cw \quad (18)$$

で、 c すなわち光速で伝わるエネルギー密度の流れを表している。電場だけ、磁場だけではあらたに場をつくり伝播させることはできないことが見て取れよう。

変位電流が磁場を生成しないという意見は、Jefimenko 流の遠隔作用的な表式をもとに議論されていることが多い。場の源は電荷であり、電流であっても、伝播の過程で、変位電流が磁場をつくっている。高校物理教科書では陽には変位電流とは呼ばれていないが、上述のとおりである。電磁気学は物理学に近接作用を持ち込んだ初めての分野である。遠隔作用的な

数式で書かれたものを見て、源から直接別の点に場をつくっていると考えるはならない。そこには伝播の物理が必要である。

4. それでは

導体を流れる電流の要素である電子は、普通の電場の下では速さは極めて小さいことが知られている。では、なぜ電気信号が光速で伝わるのか。長大な送電線を考えるまでもない。変化する電流によって生成される電磁場は導体に沿っても伝わり、導体中の電子を運動させる。いわば、電流は電磁場によって誘起されている。それも踏まえて Maxwell 方程式は、電場、磁場という場の量を、源である電荷、電流が創り出すと言う形式で書いている。

では、もう一つ、送電線が伝送する巨大な電気エネルギーはどこを伝わって来るのだろうか。上記と関連して是非考えていただきたい。

おわりに、Maxwell 方程式以前の遠隔作用の考えだけでは、電磁気学を正しく理解することが難しいことが他にも間々起きることを、蛇足ではあるが記しておきたい。

参考文献

- 1) D. F. Bartlett and T. R. Corle, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 59, 横田穰一, 物理教育 **60** (2012) 99. など。
- 2) A. P. French and J. R. Tassman, J. Am. Phys. **31** (1963) 201, D. F. Bartlett, Am. J. Phys. **58** (1990) 1168 など。
- 3) J. A. Heras, Am. J. Phys. **79** (2011) 409 など。Jefimenko の式は誤って方程式と記述されていることがある。
- 4) 斎藤吉彦 物理教育 **63** (2012) 209.

この稿は平成 28 年 11 月 26 日、日本物理教育学会近畿支部の物理教育研究集会で発表したものを基にしている。編集部の許可を得てここに収録する。

For a better understanding of electromagnetism
TAKAHASHI, Noriaki
Nakanoshima Science Laboratory

