大阪市立科学館研究報告 27, 17 - 22 (2017)

ヤングの実験で複スリットの手前に置かれる単スリットの役割について

大 倉 宏 *

概 要

ヤングの実験は、光の波動性を明瞭に示す実験として高校の教科書にも取り上げられている。この実験では、レーザーを使わない場合、光源と複スリットとの間には単スリットが置かれる。この単スリットの役割とは何かを明らかにするのが本稿の目的である。位相の揃ってない光源からの光では干渉しないため、干渉縞ができるはずがないという誤解もあるがそうではないことを示す。

1. はじめに

光の波動性を示す実験として、いわゆるヤングの実験は高等学校の教科書にも登場する [1)]。この実験をレーザーではなく、放電管や白熱電球を光源にして行う場合は、干渉縞を得るには複スリットの手前に単スリットを置かなければならない。

Onsen-ML で中田氏は、この単スリットは何のために置かれるのかという問題を提起した [2)]。多くの高校の教科書では、光を回折させ複スリットに届かせるため、あるいは光の位相を揃えるために単スリットが置かれると説明されている。筆者らも最初は位相を揃えるためだと考えた。しかし、中田氏も指摘のように単に単スリットを通過しただけでは、揃っていなかった光の位相が揃うはずがない。

光源の位相が揃っているかどうかとスクリーンに干渉縞ができるかどうかは別問題であることは既に知られていることである。もちろんヤングはレーザーなど使わずに干渉縞を発見した。

しかし、干渉縞を作るためには、光源からの光は位相の揃った波でなければならないはずだ、と筆者らはずっと思い込んでいた。このような誤解はかなりあるのではないだろうか。

本稿の目的は、位相の揃っていない光源からの光でも干渉縞ができることと、複スリットの手前になぜ単スリットが置かれるのかの理由を明らかにすることである。全く位相の関係ない光が異なる場所から複スリットに入ったとき、それでも干渉縞はできるのか、それとも光が重ね合わされた結果干渉縞がかき消されてしまうことになるのか、議論したい。

この結論は既に知られていることであり、筆者らの発見はどこにもない。しかし、干渉縞を作るためには、光源は位相の揃った光を出していなければならないはずだ、という誤解は広くあるように見受けられるので、本稿にまとめる意味はあるように思う。

第 2 節で点光源の作る干渉縞の公式を導き、第 3 節で点光源が2つあるとき、自身とは異なる点光源からの光波の重ね合わせが消えてしまうことをみる。第 4 節で点光源が多数ある場合を拡張して有限の大きさを持つ光源の作る干渉縞を議論する。そして、第 5 節で単スリットの手前に置かれる単スリットの役割について議論する。

2. ひとつの点光源の作る干渉縞

今、x-y 平面上にスクリーンがあり、そのスクリーンに平行に複スリットの空いた衝立が別の x-y 平面上にあるとする。そして衝立を挟んでスクリーンと反対側に点光源があるとする。点光源は十分小さく大きさは無視でき、考えている時間内で強度も振動数(波長)も変化しない光を出し続けるとする。

複スリットの2つのスリット A、B の間隔は d で、スリットは y 方向に細長く、その幅は十分に小さい(事実上線スリット)とする。2つのスリットが y 方向に十分な長さがあれば、y 方向については考慮せず2つのスリットと点光源を含む z-x 平面上(この平面は、複スリットと直交している)で考えれば十分である(光は z 方向に進む)。

今、考えている z-x 平面とスクリーンの交線は直線となるが、この直線上で A、B から距離の等しい点を O と

*大阪市立科学館 学芸員
ohkura@sci-museum.jp

する。もし点光源が A、B の中点 M と点 O を通る直線(スクリーンや衝立に垂直な直線)上の点 S にあるならば、SAO＝SBO であるから、よく知られているように O 点は干渉縞の明点になる。

次に z-x 平面上の点光源が、点 S を通りスクリーンと複スリットに平行な直線上の点 P にあるとき、スクリーン上の点 Q での光の強度を考える(図1参照)。点光源 P から出た球面波は A、B で回折し、再び A、B を波源とする球面波となり点 Q 到達する。ただし光波は A、B で回折する際に位相は変化しない。点光源–複スリット間、複スリット間–スクリーンの距離が十分長ければ、球面波はスクリーン上では平面波に近似してよい[3)]。

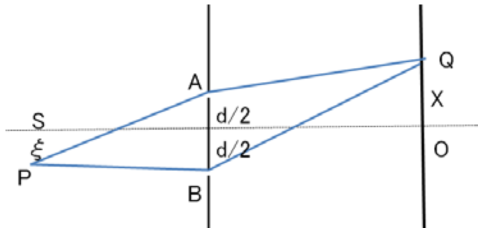

図 1

また、PAQ、PBQ の距離は異なるし、その角度も異なることから、PAQ を経由した光波の振幅(強度)と PBQ を経由した光波の振幅は厳密には異なるが、その差は小さいので無視でき共に A_0 で表されるものとする。つまり角度の違いは問題にならず、距離の差(位相差)のみが問題になる。

PAQ、PBQ の長さをそれぞれ Z、Z'で表せば、ここでは、P 点を出発するときの初期位相を考慮する必要はないので、それぞれを経由した光の振幅は

$A = A_0 e^{i(kZ-\omega t)} = A_0 e^{i\theta}$、$A = A_0 e^{i(kZ'-\omega t)} = A_0 e^{i\theta'}$

と表せる。ここで ω は角振動数($= 2\pi\nu$)、k は波数($= 2\pi/\lambda$)であり、$kZ - \omega t$、$kZ' - \omega t$をそれぞれθ、θ'と置いた。

Q 点での強度は

$I = \left| A_0 e^{i\theta} + A_0 e^{i\theta'} \right|^2 = 2A_0^2(1+\cos(\delta))$ （式 1)

となる[4)]。ここで位相差$\delta = |\theta - \theta'|$である。これより強度は位相差(経路差)だけで明暗が決まることが分かる。経路差$|Z - Z'| = |PAQ - PBQ|$が λ の整数倍なら強度は $4A_0^2$ となり明となり半奇数倍なら強度は 0 となり暗となる。

以下、具体に詳細の計算を行う。点 O と点 Q の距離を x、点 S と点 P の距離を ξ と置く。(どちらでもよいことではあるが、式をきれいにするために、x と ξ の向きは反対にとる。)スクリーンと複スリットとの距離を L、光源と複スリットとの距離を L'とすると、

$$PA^2 = \left(\xi + \frac{d}{2}\right)^2 + L'^2$$

$$AQ^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + L^2$$

$$PB^2 = \left(\xi - \frac{d}{2}\right)^2 + L'^2$$

$$BQ^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + L^2$$

であるから d、x、ξ が L、L'に比べ十分小さいので、$PAQ - PBQ = \xi d/L' - xd/L$ となる。この式より、$PAQ = PBQ$ となるのは$x = \xi L/L'$、すなわち PQ が複スリットの中点 M を通るときであることが分かる。この結果を 1 式に代入すると$\delta = 2\pi|PAQ - PBQ|/\lambda$であるから、

$$I = 2A_0^2\left[1 + \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\xi d}{L'} - \frac{xd}{L}\right)\right\}\right] \quad (式 2)$$

が得られる。2 式より干渉縞は、よく知られているように $x = \lambda L/d$ の周期でサインカーブを描いて明滅する。また、点光源が点 S にあるときと点 P にあるときとでは干渉縞の間隔(周期)は変わらないから、点 S から光源が直線 S 上を ξ だけ動くと干渉縞の位置が点 0 から$x = \xi L/L'$だけずれたものになることが分かる。

3．ふたつの点光源がつくる干渉縞

次に 2 つの点光源が、点 P_1 と点 P_2 にある場合を考える。2つの光源は、波長も強度も全く同じであるが、位相は無関係であるとする。

P_1AQ を経由した波は$A_0e^{i\theta_{1A}}$、P_1BQ を経由した波は$A_0e^{i\theta_{1B}}$、P_2AQ を経由した波は$A_0e^{i\theta_{2A}}$、P_2BQ を経由した波は$A_0e^{i\theta_{2B}}$で表されるとすると、この4経路の光を重ね合わせた点 Q での光の強度 I は、

$$I = A_0^2\left|e^{i\theta_{1A}} + e^{i\theta_{1B}} + e^{i\theta_{2A}} + e^{i\theta_{2B}}\right|^2$$
$$= A_0^2\{\left|e^{i\theta_{1A}} + e^{i\theta_{1B}}\right|^2 + \left|e^{i\theta_{2A}} + e^{i\theta_{2B}}\right|^2$$
$$+ 2(\cos\delta_{1A2A} + \cos\delta_{1A2B} + \cos\delta_{1B2A}$$
$$+ \cos\delta_{1B2B})\}$$

である。ただしここで、δ_{1A2A}などは$|\theta_{1A} - \theta_{2A}|$などである。ここでの$\delta_{1A2A}$などには経路差に依るものだけではなく、光が P_1、P_2 を出発した際の初期位相差も含まれる。

上式の初項$\left|e^{i\theta_{1A}} + e^{i\theta_{1B}}\right|^2$は P_1 にだけ点光源があるときの干渉縞の強度であり、第 2 項$\left|e^{i\theta_{2A}} + e^{i\theta_{2B}}\right|^2$は P_2 にだけ点光源があるときの干渉縞の強度になっている。続くコサインの交差項は、P_1 から出た光と点 P_2 から出た光の干渉項になっていている。コサインは−1 から 1 の値で振動するが、各瞬間、各瞬間ではお互いにキャンセルすることはない。

しかしレーザーではない一般の光源、例えば放電管では、光の位相が一定である時間は 10^{-8} 秒程度であると言われている。そのためδ_{1A2A}等は 10^{-8} 秒程度で値が変わり、この結果点 Q の明るさは短い時間で激しく明滅する。しかし我々の目は、このような激しい明滅は感知できず、その積分、あるいは平均を感知できる

のみである。また、通常のカメラ装置でも同様である。したがって、交差項はキャンセルされるものとしてよい。したがって、光の強度は、

$$I = A_0^2\left[\left|e^{i\theta_{1A}} + e^{i\theta_{1B}}\right|^2 + \left|e^{i\theta_{2A}} + e^{i\theta_{2B}}\right|^2\right]$$

となり、P_1 の点光源と P_2 の点光源の強度の単純な足し算になる。

もし、P_1 と P_2 が極めて近くにあれば、P_1 からの光が作る干渉縞と P_2 からのものとは、明暗の間隔も位置も一致するから、明瞭な干渉縞が見える。

P_1 と P_2 が離れるにつれて干渉縞の位置がずれてきて明瞭さは失われる。距離が ξ だけ離れると 2 つの干渉縞の明暗の位置は $x = \xi L/L'$ だけずれる。もし、$\xi = \lambda L'/(2d)$ 離れるとそのずれは $\lambda L/(2d)$ となり、明暗明暗の干渉縞に暗明暗明の干渉縞が重なり、干渉縞は消えてしまう[1]。

4．多数の点光源が作る干渉縞と有限の大きさをもつ光源がつくる干渉縞

点光源が直線 S 上に多数あるときは、点 Q でに光の強度 I は、

$$I = A_0^2\left|\sum_j \left(e^{i\theta_{jA}} + e^{i\theta_{jB}}\right)\right|^2$$

$$= A_0^2\left[\sum_j \left|e^{i\theta_{jA}} + e^{i\theta_{jB}}\right|^2 + 2\sum_{i\neq j}\left\{\cos(\delta_{iAjA}) + 2\cos(\delta_{iAjB}) + \cos(\delta_{iBjB})\right\}\right]$$

ここで、δ_{iAjA} 等は異なる点光源からの光の位相差である。前の項(指数関数の部分) はそれぞれの点光源の強度の足し合わせ、後の項(cos 関数の部分)は交差項(クロスターム)になっている。

交差項は前節で見たように点光源の数が少ないときは瞬間瞬間で生き残るが、点光源が多数あれば、位相差 δ_{iAjA} 等はランダムなので各瞬間でも打ち消しあって 0 になってしまう。その結果、

$$I = A_0^2\sum_j \left|e^{i\theta_{jA}} + e^{i\theta_{jB}}\right|^2$$

となる。つまり、多数の点光源が作る干渉縞の強度は、ひとつひとつの点光源が作る渉縞の強度を単純に足し合わせるだけで求まる。

いよいよ、本稿の主題である単スリットからの光が作る干渉縞の強度を求める。直線 S 上に S を中心に D の幅を持つ単スリットからの光の点 Q での強度は、これまでの議論により、2 式を用いて ξ に関する次の積分で与えられる[5)]。

$$I(x) = 2A_0^2\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 1 + \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\xi d}{L'} - \frac{xd}{L}\right)\right\} d\xi$$

$$= 2A_0^2 D\left[1 + \gamma\left\{\cos\left(\frac{2\pi xd}{L\lambda}\right)\right\}\right] \qquad \text{（式 3）}$$

ここで係数 γ は、$\gamma = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi Dd}{L'\lambda}\right)$ であり、sinc は $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ で定義されるシンク関数と呼ばれる回折の公式の中でよく現れる関数である。

$I_0 = 2A_0^2 D$ と置けば、$I_0\left\{1 + \gamma\cos\left(\frac{2\pi xd}{L\lambda}\right)\right\}$ であり、I の最大値 I_{max} は $I_0(1+\gamma)$、最小値 I_{min} は $I_0(1-\gamma)$ であるから、干渉縞の明瞭 $V = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}$ は γ に等しく、γ は明瞭度あるいはコヒーレンス度と呼ばれる。

3 式で D→0 の極限では、当然であるが ξ=0 の位置にあるひとつの点光源のときの 2 式と一致し、$\mathrm{sinc}(0) = 1$ であるから γ は 1 であり、(強度の絶対値は小にしても) 明瞭度は良好である。

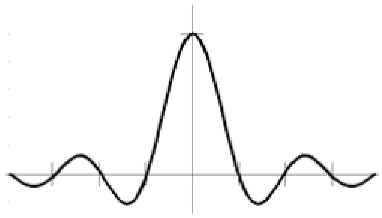

図 2：シンク関数

Dが大きくなると強度の絶対値は大きくなるが、干渉縞の周期や明暗の位置は変化しない。しかし γ が単調に小さくなって行き明瞭度は落ち、$D = \lambda L'/d$ になると γ =0 となり、干渉縞は完全に見えなくなる[2]。

5．干渉縞の消失

光の強度分布は、光源から到達する全ての光の振幅の和をとり、それを 2 乗することで計算されるが、交差項は消えてしまうので、異なる点光源からの強度分

[1] もし P_1 と P_2 がちょうど λL'/(2d)の距離にあっても光波の位相が出発点で常に揃っている場合、それぞれの光源が作る干渉縞は明暗を埋め合ってしまうのは同じだが、交差項は位相が揃っているため消えるかどうか自明ではない。しかし、$\delta_{1A2A} = \delta_{1B2B} = \pi/2$ で消え、δ_{1A2B} と δ_{1B2A} はお互い π だけずれているので打ち消し合う。その結果交差項も消え、結局 I=0 となる。

[2] 干渉縞が消えるのは、位置のずれた干渉縞が重なり合うためである。そして干渉縞の位置がずれるのは、PA、PB の距離が異なると A、B に位相の異なる波が到着するからである。$D = \lambda L'/d$ であると A、B には−π から π まで位相のずれた光波が次々と到来しし、干渉縞が全く見えなくなる。S 点を中心にしなくとも光源が直線 S 上で $\lambda L'/d$ の大きさであるとちょうど 2π の範囲で位相のずれた光波が A、B に到着するので、干渉縞はできない。

布の単純な算術和(積分)ですべての光の干渉縞が求まった。

点光源からの光の作る干渉縞の強度はスクリーン上でコサイン関数的に変化した。光源の位置を少しずらすと干渉縞の位置もずれてくる。有限の大きさを持つ光源の強度分布は、この少しずつ位置のずれた明暗の足し合わせ(積分)になり、暗の位置に光が到着することで、全部の光の作る干渉縞はやはり同じ周期でコサイン関数的に変化するが、明瞭度が落ちていくのである。光源の大きさ D が大きくなるにつれ干渉縞が不鮮明になり、$D = \lambda L'/d$になると完全に見えなくなる。ちなみ 3 節でみたように 2 つの点光源の距離が$\lambda L'/(2d)$で干渉縞が見えなくなったが、$D = \lambda L'/d$は、この距離のちょうど 2 倍にあたる [3]。

光源の大きさ D は複スリットの手前に置かれる単スリットの幅とみなすことができるのでD/L'は複スリットの位置から見た光源(あるいは単スリット)の見かけの大きさ(角度)となる。干渉縞の見える条件$D < \lambda L'/d$は、$D/L' < \lambda/d$と書き直してやれば、光源の見かけの大きさが、その光源から出る光の波長を複スリットの間隔で割った大きさより小さければ干渉縞が見えることになる。

例えば 500nm の可視光に対して、0.3mm の間隔の複スリットを使って干渉縞を見ようとすれば、干渉縞の見える条件$D/L' < \lambda/d$ より光源の見かけの大きさは1.67×10^{-3} より小さくなければならない。この大きさは、3m 先の 5mm の大きさの光源に対応するので、大きさ 5mm の光源に対し 3m 以上離れれば、単スリットがなくとも干渉縞が見え、それより近ければ、単スリットで光を絞り込まなければならない。高輝度 LED の光は位相は揃ってはいないが、小さいので距離を十分とれば単スリットなしに干渉縞を得ることができる。

一方で例えば、太陽の視直径は 0.5 度=1/100 程度であるから、単スリットなしに太陽を光源として干渉縞を見ることはできない。

明瞭さ$\gamma = \mathrm{sinc}(\frac{\pi d D}{L'\lambda})$は、複スリットとスクリーンとの距離 L には関係しないから、目の傍で複スリットを持ち覗き込むと簡単に面白い実験ができる。光源から離れたところでは明瞭に見えていた干渉縞が、目とスリットとの距離を変えないようにして光源に近づくと(D/L'が大きくなることに対応)、干渉縞が次第に不鮮明になり、$L' = Dd/\lambda$ まで近づくと干渉縞が見えなくなってしまう。このとき$\lambda L/d$が一定に保たれているから、干渉縞の位置は変わらず、明瞭度だけが変化していくのである。驚くべきことは、そこからさらに近づくと再び干渉縞が明暗を逆転して現れるのである。それはγが負につまりコサインの位相がπだけずれたことを意味するが、sinc 関数の振る舞い(図 2)と中身の変数を見れば理由は明らかである。

6. 議論

干渉縞は複スリット上の点 A と B を通過した光が干渉して作った。この場合、空間的に異なる点 A、B における空間的コヒーレンスがあったと言われる [5,6]。A B を固定しておいて、単スリットの大きさDを大きくすると(あるいは距離を近づけることで)干渉縞は不鮮明になった。光源の見かけの大きさが大きくなることで A、B の空間的コヒーレンスが失われたのである。ある距離(d)を隔てた 2 点A、Bの空間的コヒーレンスというのは、光源大きさや種類、性質に依るのである。レーザーを光源としたとき、単スリットを使わなくとも干渉縞が観察できるのは、レザーが輝度が高いだけでなく、空間的コヒーレンスが良いからだと考えられる [6) 4]。

ここでの結論としては、複スリットの前に置かれる単スリットは、位相を揃えるためでなく、光源の見かけの大きさを小さくする [5]目的で置かれているということを明らかにした。

その見かけの大きさは、光源の波長を複スリットの間

---

[3] これは次のように考えると理解できる。直線 S 上に P_1 を置き、そこから$\lambda L'/(2d)$の距離に P_2、さらに$\lambda L'/(2d)$ の距離に P_3 を置く。P_1–P_2 間を N 等分して P_{11}、P_{12}、P_{13}、、P_{1N-1} を置き(P_1=P_{10}、P_2=P_{1N})、P_2–P_3 間を N 等分して P_{21}、P_{22}、P_{23}、、P_{2N-1} を置き、それぞれの位置に点光源を置く。今、P_{1i} と P_{2i} の距離は$\lambda L'/(2d)$なので、この 2 つの点光源の作る干渉縞がずれて足し合わされた結果、干渉縞は消えてしまう。これが、すべての i について成り立つので、2N 個の点光源は干渉縞を作らない。$N \to \infty$の極限を考えれば、光源の大きさが$\lambda L'/d$ならば干渉縞ができない。脚注の 2 も参照。

[4] 脚注 1、2 の結果と論法を拡張するとレーザーでも光源がある程度大きくなると明瞭度が悪くなりそうに思える。しかし、そのようなことはない。ここで議論していることが起こる(干渉縞が消える)のは複スリット A、B に位相の揃わない光波が来るからである。レーザーは周波数が安定していて、指向性が高い。レーザー光のビームの断面では光波の位相が揃っているので A、B には常に位相の揃った波が到着する。従って単スリットなしでも明瞭な干渉縞が現れる。

[5] しかしでたらめな位相の光が A、B に入ったのでは干渉縞はできない。光源の見かけの大きさが小さくなったことで A、B 間の位相になんらかの相関が生じたはずである。それはこういうことである。

光源の中央 S よりξ離れていた光源の中の P 点から出た光の光路差 PA−PB は、2 節でやった計算から$\frac{\xi d}{L'}$である。つまり波長λの$\frac{\xi d}{\lambda L'}$倍であり、位相差は$2\pi\frac{\xi d}{\lambda L'}$である。このことは、光源の中の S点からP点の間を出発した光は、A、B に到達したときの位相差が$2\pi\frac{\xi d}{\lambda L'}$の範囲にあるということである(0 から$2\pi\frac{\xi d}{\lambda L'}$の範囲の位相差の光が連続的に複スリットに到達する)。そして、干渉縞が見えているときは、この範囲はπを超えることはない。つまり、単スリットで光源の見かけの大きさを小さくするということは、複スリットに到達する光の位相差の範囲を小さくしていることになる。

もし D が干渉縞の見えなくなる大きさ$D = \lambda L'/d$ になれば、$\xi = D/2$を代入して位相差の範囲はπとなる。このとき光源の両端では位相差の範囲は2πとなり、干渉縞は見えない

隔で割った値より小さくなければならない。光源の見かけの大きさがそれより小さければ、光源からの光の位相は揃っていなくとも干渉縞は現れる。それは、中田氏の実験でも確かめられた[2)]。

これらのことは、知っている人にとっては当たり前のことであろう。しかし位相の揃った光でなければ干渉縞は得られないという誤解はかなり多いと思われる。実際、幾人かの人と話すとそう思っている人が多かった。筆者ら自身も、最初中田氏からかなり大きな光源(単スリット)を使っても干渉縞が観察できると聞いても久保田[4)]や黒田[5)]の解説を見るまでは、そんなことをしたらめちゃくちゃな位相の光が重なり合って干渉縞つぶれて見えなくなると、なかなか信じようとしなかった。そこで敢えて本稿にまとめた。

単スリットは位相を揃えるためでなく、光源の見かけの大きさを小さくするために置かれるのである。

単スリットは位相を揃える働きはない。しかし光源の見かけの大きさが小さくなることは、複スリットの位置での位相差の範囲を小さくすることになる。その範囲が2π以下[6]でなければ干渉縞は見えない。

謝辞

この問題を提起し実験を紹介していただいた中田勝夫氏をはじめ Onsen-ML の皆さんに感謝します。

参考文献

1) 「物理」数研出版 182 ページ
2) 中田勝夫　Onsen-ML
3) 長岡洋介「振動と波動」(裳華房) 203 ページ
4) 久保田宏「光の干渉性(Coherency)とその応用」
5) 黒田和男「光学」第 7 章 干渉 付録 C 13 ページ
6) 霜田光一「レーザー物理入門」(岩波書店)30 ページ

[6] 光源の中央から出発した光が、複スリットの位置 A、B に到達したときの位相差がδであれば、$\delta-\pi$から$\delta+\pi$ までの範囲になると見えなくなる。