大阪市立科学館研究報告 28, 13 - 18 (2018)

ヤングの実験で複スリットの手前に置かれる単スリットの役割について2

大 倉　宏 *

概　要

ヤングの実験では、複スリットの手前に単スリットが置かれることが多いが、その役割は光の位相を揃えることだとされている。しかし、位相がそろっていることとコヒーレンスとは別問題である。本稿では、空間的コヒーレンス、横コヒーレンス長、伝搬によるコヒーレンス等を論じ、何のために単スリットが置かれるのを論じる。また、複スリット自身の孔の幅についても論じる。

1. はじめに

複スリットの実験、いわゆるヤングの実験では、光源と複スリットとの間に単スリットが置かれることが多い。前稿[1)]ではその役目、大きさ(幅)の条件等を論じたが、なぜその幅以下でなければならないのかの説明は不十分であった。また、複スリット自身の孔の幅についても触れなかった。そこで本稿では前稿のそれらを補う目的で記す。

単スリットの役割は、光源のみかけの大きさを小さくする目的で置かれることを前稿では示した。光源が十分小さかったり、副スリットとの距離が十分離れていれば単スリットは不要である。単スリットは、副スリットの位置で光波の位相を揃えるために置かれるという説明を散見するが、スリットを通過することによって光の位相が揃うようなことはない。位相が揃っていることと、干渉縞が見える、すなわちコヒーレントであることとは別問題である、というのが前稿の主張であった。

複スリットの 2 つの孔を通過する光がまったく相関を持たなければ干渉は起こりようがない。しかし、干渉縞が生じないような光源でも単スリットを挟めば干渉縞が現れることがある。この事実と干渉が起こるのは位相が揃うこととは無関係である、という前稿の主張とはどのような関係にあるのかを明らかにする、というのが本稿の目的である。

それを通じて、空間的コヒーレンス、横コヒーレンス長、伝搬によるコヒーレンス等の概念も整理しておきたい。前稿同様本稿でも新たな知見や、筆者による新たな発見はないが、誤解の多い主題であるので、ここにまとめる意義があるように思う。

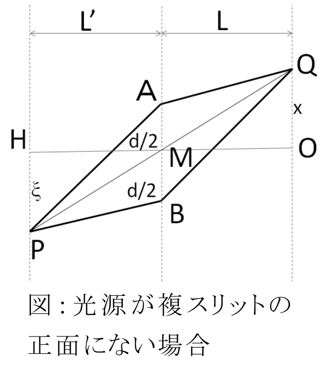
2. 点光源の作る干渉縞

本稿を通じて、単スリット、あるいは複スリットはスクリーンと平行に置かれるものとする。また、スリットの長さは、スリットの幅に対して十分長いとする。このため、現実には 3 次元であるが、2 次元で考えれば十分である。

さて点光源 P を複スリット AB の垂直二等分線上に置く。スクリーンには干渉縞ができるが、スクリーンと垂直二等分線との交点 Q は明(後に示すように第一明点)となる。これは、A、B が同じ波面の、したがって同位相の光波に照射され、距離 AQ と BQ が等しいから当然である。Q 点では、A 点から来た光波が山なら B 点からの光波も山であり、谷なら谷になるので合成される光波は必ず強め合う。

では、P が垂直二等分線上からずれていたらどうなるであろうか？前稿で議論したように干渉縞の明暗の位置はずれるが、同じ明暗の間隔の干渉縞が現れる。

では、どれだけずれるかというと、AB の中点を M とすると直線 PM とスクリーンとの交点(ここでのQ点とする)が第一明点となる。これは、複スリットとスク



図：光源が複スリットの正面にない場合

*大阪市立科学館
ohkura@sci-museum

リーンとの距離 L、光源と複スリットとの距離 L'が副スリットのスリット間隔 d に比べて十分大きいという近似で、PA＋AQ=PB＋BQ、すなわち光路の長さが等しい(光路差が零)からである(付録 A 参照)。

前稿 [1)]では、有限の大きさをもつ光源の作る干渉縞は、光源内の無数の点光源 P、P'、P"、P'"、、、等が作る干渉縞の重ね合わせになるということを用いて、有限の大きさを持つ光源、あるいは単スリットで光が絞られた光源の作る干渉縞を議論した。

結論としては、光源の大きさ(あるいは単スリットの幅)D が大きくなるに従い、干渉縞の明瞭度が悪くなり、D=Lλ/dに達すると干渉縞は完全に見えなくなる、ということであった。次節では、この D=Lλ/d とは何を意味しているのか議論したい。

3．点光源の位置が変わると複スリットの位置に到達する光の位相はどう変わるか

ここでは、A、Bがどのような光波で照射されるか、その位相差を考えたい。

点光源 P が垂直二等分線上にあるときは、PA＝PB であるから光路差Δ(＝PA－PB)は零であり、A、B は同じ位相の光で照射される。

では、点光源 P が垂直二等分線上にない場合はどうなるだろうか？Pから垂直二等分線に下した足をHとし、その距離 PH をξと置けば PA の長さは、

$$\mathrm{PA}=\sqrt{\mathrm{L}'^2+\left(\xi+\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^2}=\mathrm{L}'\sqrt{1+\left(\frac{\xi+\frac{\mathrm{d}}{2}}{\mathrm{L}'}\right)^2}$$

$$=\mathrm{L}'\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\xi+\frac{\mathrm{d}}{2}}{\mathrm{L}'}\right)^2\right\}$$

$$=\mathrm{L}'+\frac{1}{2\mathrm{L}'}\left(\xi^2+\xi d+\frac{d^2}{4}\right)$$

である。一方 PB は

$$\mathrm{BP}=\sqrt{(\mathrm{L}'^2)+\left(\xi-\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^2}=\mathrm{L}'+\frac{1}{2\mathrm{L}'}\left(\xi^2-\xi d+\frac{d^2}{4}\right)$$

であるから、光路差Δは、

$$\Delta=\mathrm{PA}-\mathrm{PB}=\frac{\xi\mathrm{d}}{\mathrm{L}'}$$

となる。

干渉縞が完全に見えなくなる光源の大きさ D は$\mathrm{D}=\frac{\mathrm{L}'\lambda}{\mathrm{d}}$であった。Δの式のξにこの$\frac{\mathrm{L}'\lambda}{\mathrm{d}}$を前式に代入すれば、$\Delta=\frac{L'\lambda}{d}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{L}'}=\lambda$ となり、光路差の違いが 1 波長に達するほど光源が大きくなると干渉縞が完全に消えることが分かる。

すなわち、光源だんだんと大きくなっていくとA、B は次第に位相のずれた光が重ね合わされて照射されるようになり、それが 2π(＝1波長)に達すると干渉縞が完全に消えるのである。

このとき、スクリーン上では何が起こっているのかというと、光源内の点光源が作る明瞭な個々の干渉縞は、ずれて重ね合わされ次第に明瞭さが失われていく。暗の部分にずれた明の部分が重ね合わされていくのである。ずれが明暗の 1 周期に渡って重ね合わされると明暗は完全にフラットになってしまう、すなわち干渉縞は完全に消滅するのである。この結論は非常に理解しやすいだろう。

4．空間的コヒーレンス、横コヒーレンス長と伝搬によるコヒーレンス

ヤングの実験は、光の波長を求めるのに使うこともできるが(高校物理のハイライトのひとつだろう)、複スリットの位置での光の可干渉性をテストする実験であるという見方も可能である。

波面の揃った光で A、B を照射すれば明瞭な干渉縞が現れ(コヒーレントな状態)、波面が揃ってなければ干渉縞はぼやける(部分的コヒーレント＝コヒーレントとインコヒーレントとの間の状態)。そして実際には不可能であるが、仮に A と B にそれぞれ独立な点光源を置くことができれば、全く干渉縞は見えない(インコヒーレントな状態)。この意味で、スクリーンに現れる干渉縞の明瞭度によって、点 A と点 B での光の可干渉性(コヒーレンス)、つまり空間的コヒーレンスを調べていると言ってよいだろう。

前節の$\mathrm{D}=\frac{\mathrm{L}'\lambda}{\mathrm{d}}$を d について解くと$\mathrm{d}=\frac{\mathrm{L}'\lambda}{\mathrm{D}}$という長さの単位の量が得られるが、この$\frac{\mathrm{L}'\lambda}{\mathrm{D}}$は横コヒーレンス長と呼ばれる。複スリットの間隔がこの横コヒーレンス長より小さければ、干渉縞が観測されるうる。つまり、ごく近くにある 2 点が、波長λの光を放射する大きさDの光源から L'だけ離れたところにあるとき、その 2 点間の距離が$\mathrm{d}=\frac{\mathrm{L}'\lambda}{\mathrm{D}}$以下の距離であれば、空間的にコヒーレント(部分的コヒーレントで干渉を起こしうる)なのである。

今度は逆に A、B の距離 d を固定して考えよう。そして有限の大きさ D を持つ光源が A、B に対して距離l離れて置かれているとする。$\mathrm{l}<\frac{\mathrm{Dd}}{\lambda}$ なら干渉縞はできないが、$\mathrm{l}>\frac{\mathrm{Dd}}{\lambda}$ ならば干渉縞ができる。光源が遠く離れることによって干渉性が良くなったのである。この距

離については、特に名前はないようである。

もともとコヒーレンスでなかった光源が遠く離れることによってコヒーレンスになることを伝搬によるコヒーレンスと呼ぶ。光源をスリットで見かけ上小さくすることは、光源を遠くに置くことと同じ効果を生む。複スリットの手前に置かれる単スリットは伝搬によるコヒーレンスと同じ効果を得るために置かれるのである。

では、単スリットを使わずに光源を遠くに置けば良いではないかということになるが、それでは光が弱くなる。十分な光量を得るために光源を近くに置いて、単スリットで光を絞るのである。すると、光量確保しつつ伝搬によるコヒーレントと同じ効果を得ることができるのである。

有限な光源の中央の１点から出た光波が点Ａと点Ｂに到達したとき、位相差が δ であったとしよう。その近傍の１点から出た光の位相差は ε を微小な角として $\delta+\varepsilon$ とあらわされる。点が中央から離れると ε は次第に大きくなっていく。$|\varepsilon|$の最大値 ε_m は光源の端からのものである。$\varepsilon_m<\pi$ ならば、干渉縞が見えうる。$\varepsilon_m>\pi$ になると干渉縞は消える。そして、同じ光源でも距離を置くことにより、ε_m を小さくすることが可能なのである。

注意すべきは、伝搬によりコヒーレントになったといっても、もともと位相が揃ってない光波の位相が揃ったわけではない。有限な大きさの光源を用いれば必ず A、B にはランダムな位相の光が次々に到達している。それでも上記条件が満たされれば、光源内の各点各点から出てA、Bにやってくる光の位相差のずれがある範囲内に収まるので干渉縞は見える、ということなのである。

５．複スリットの孔の幅ついて

これまで、単スリットの幅を議論してきたが、実際には複スリットの孔にも幅がある。この幅は干渉縞にどのような影響を与えるのだろうか。

５－１．単スリットによる干渉縞

この問題を考える前に、単スリットによる干渉縞を考えたい。孔が狭ければ複スリットではなく、単スリットでも光は回折を起こし、干渉縞が現れる。どのようにして干渉縞が計算できるかは、ホイヘンスの原理を使えばよい。

計算は付録[C]を参照していただいて、結果だけを示せば、干渉縞の強度Iは、$\mathrm{sinc}^2 px$ に比例する。ここで sinc は光の回折でしばしば現れるシンク関数 $\mathrm{sinc}x=\sin x/x$ で、p は波数と同じ次元を持つ量、$p=kD/2L=2\pi D/2\lambda L$ である。ただしここで、Dは単スリットの幅、L はスリットとスクリーンとの距離、λ は波長、k は波数($k=2\pi/\lambda$)である。また x はスクリーン上での最輝度点からの距離である。

sinc 関数は 1 番目のピークに対して 2 番目、3 番目のピークはかなり小さくなっている。また、開口部の大きさDはpの分子に入っている。したがって、Dが小さくなるとシンク関数はゆっくりと変化するようになり、スクリーン上の明るい部分が広がる。開口が狭くなれば、回折の効果がより効いてくるのである（回折により光の到達する範囲が広くなる）。

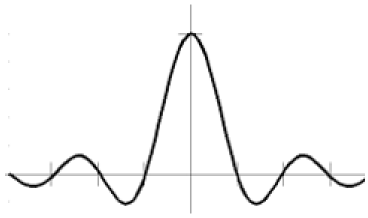


図 2:シンク関数

５－２．複スリットの孔の幅

孔の幅 a で間隔 d の複スリットの干渉縞の強度関数I は、$\mathrm{sinc}^2 p'x\cdot\cos^2 qx$ に比例する。ここで、$p'=ka/2L=2\pi a/\lambda L$、$q=kd/2L=2\pi d/2\lambda L$である。導出は付録[D]を参照されたい。

ここでなぜシンク関数が出てくるのかは、前の単スリットの干渉縞の式、あるいは導出を見れば明らかだろう。シンク関数は孔の幅 a にだけ依存し、スリットの間隔 d には依らない。実際 $a=D$ と置けば $p'=p$ となり、シンク関数の部分は一致する。

一方でコサインの部分が出てくる理由も理解しやすい。スリットの孔の幅が無視できるときは、付録[B]より、干渉縞の強度は $1+\cos(2\pi dx/\lambda L)$に比例していた。

幅が零、$a\to0$ の極限で $\mathrm{sinc}p'x\to1$ だから、コサインの 2 乗の部分だけを議論すればよく、$\cos^2 qx=1/2\cdot(1+\cos 2qx)=1/2\cdot(1+\cos(2\pi dx/\lambda L))$であるから、別に求めた(付録[B]の)結果と完全に一致している。

さて強度関数 I 全体の変化であるが、$d>a$ であるからシンク関数変化はコサインの変化より緩やかである。したがって強度の変化は $\cos(2\pi dx/\lambda L)$の周期で振動するものに、ゆっくりと変化する $\mathrm{sinc}^2(2\pi d/2\lambda L)$が掛け算されたものになる。

シンク関数部分の 2 番目、3 番目のピークは 1 番目に比べるとかなり小さくなる。したがって、$dx/\lambda L=1$ よスクリーン上には$\lambda L/d$ の範囲に d/a 個程度の外側に行くにつれて弱くなる明暗が見えるはずである。

結論としては、複スリットの幅 a が十分狭ければ、干渉縞は光源が十分明るければ、理想的にはどこまでも続く明暗の繰り返しとなる。しかしスリットが幅を持つと、明暗は外に行くにつれて弱くなり、明のピークは d/a 個程度しか見えなくなってしまう。例えば孔の幅がスリットの間隔の 1/5 だとすれば、干渉縞は５本程度しか見え

ない。孔が大きくなると回折する角度が小さくなり、外側まで光が回り込まなくなるからである。複スリットの幅 a の幅が変わっても明暗の周期(ピークとピークの間隔) λL/d は変わらない。そのため、高校物理では a の大きさは議論しない。

6. まとめ

ヤングの実験に使われる単スリットと複スリットの幅について議論した。

単スリットは光源の明るさを確保しつつ伝搬によるコヒーレンスと同じ効果を得るために置かれる。一般の光源では、光源を遠くに置くより単スリットで絞った方が光量の点で有利である。

複スリットの孔の幅は、幅が広がるにつれ光が回折しなくなり、見える干渉縞の本数が減っていく。ただし、孔の幅はピークとピークの間隔には影響しない。

謝辞

この問題を提起し実験を紹介していただいた中田勝夫氏をはじめ有益な議論をしていただいた Onsen-ML の皆さんに感謝します。

参考文献

1） 大倉宏「ヤングの実験で複スリットの手前に置かれる単スリットの役割について」大阪市立科学館研究報告誌 27(2017)17-22 ページ

付録

[A]PM の延長線上に Q があれば、PA+AQ=PB+BQ となることの証明

図より$\frac{\xi}{L'}=\frac{x}{L}$ すなわち$x=\frac{L\xi}{L'}$である。PA+AQ は、

$$\mathrm{PA}+\mathrm{AQ}=\sqrt{L'^2+\left(\xi+\frac{d}{2}\right)^2}+\sqrt{L^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$=L'\sqrt{1+\left(\frac{\xi+\frac{d}{2}}{L'}\right)^2}+L\sqrt{1+\left(\frac{\frac{L}{L'}\xi-\frac{d}{2}}{L}\right)^2}$$

$$=L'+\frac{1}{2L'}\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+L+\frac{1}{2L}\left(\frac{L}{L'}\xi-\frac{d}{2}\right)^2$$

$$=L'+\frac{1}{2L'}\left(\xi^2+\xi d+\frac{d^2}{4}\right)+L+\frac{1}{2L}\left(\frac{L^2\xi^2}{L'^2}-\frac{L\xi d}{L'}+\frac{d^2}{4}\right)$$

である。一方 PB+BQ は、

$$\mathrm{PB}+\mathrm{BQ}=L'+\frac{1}{2L'}\left(\xi^2-\xi d+\frac{d^2}{4}\right)+L+\frac{1}{2L}\left(L^2\xi^2/L'^2+L\xi d/L'+\frac{d^2}{4}\right)$$

であるから、

$$\mathrm{PA}+\mathrm{AQ}-(\mathrm{PB}+\mathrm{BQ})=\frac{\xi d}{L'}-L\xi d/LL'=0$$

となり、 PA＋AQ＝PB＋BQ である。

なお、開平に際し d、x、ξ が L と L'に比べて十分小さいので、$\left(\frac{\xi+\frac{d}{2}}{L'}\right)^2\ll 1$などの関係を用いて近似した。

[B]ヤングの実験の強度関数

ヤングの実験をするとスクリーン上にどのような強度の明暗の縞模様ができるのか計算する。

間隔dの複スリットがスリットから距離L離れて正対して置かれているとする。スリットの長さが十分であれば、複スリットとスクリーンに対して垂直な平面内で考えてよい。

複スリットの孔(この節では幅は無視できるとする)の位置をA、Bとし、スクリーン上でA、Bから等距離の点をOとする。Oから距離xだけ離れたQ点での光の強さがこれから求めたい量である。

複スリットに位相の揃った波長 λ の光を照射する。すると、複スリットで光は回折し、A点とB点から球面波がスクリーンに向かう。

球面波の変位 A は一般には、

$$A=\frac{A_0e^{i(kx-\omega t)}}{r}$$

と表される。ここで、r は波源からの距離、A_0 は振幅、k は波数、ω は角振動数である。これを

$$A=\frac{A_0e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}$$

と書けば、光は r の場所で$\frac{A_0e^{ikr}}{r}$の複素振幅で時間的に振動していると見ることができる。

AQ間の距離を r_A、BQ間の距離を r_B と書けば、Q点での複素振幅 A は、

$$A=A_0e^{ikr_A}/r_A+A_0e^{ikr_B}/r_B$$

となる。ここで、

$$r_x=\sqrt{L^2+x^2}\sim L+\frac{x^2}{L}$$

を使えば、r_A、r_Bは、

$$r_A=\sqrt{\left(L^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2\right)}\sim r_x+\frac{xd}{2L}$$

$$r_B=\sqrt{\left(L^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2\right)}\sim r_x-\frac{xd}{2L}$$

と表せる。

分子の指数関数に対して分母の変化は穏やかだから複素振幅Aは、

$$A = A_0\frac{e^{ikr_A}}{r_A} + A_0\frac{e^{ikr_B}}{r_B} \sim \frac{A_0}{r_x}\left(e^{ikr_A} + e^{ikr_B}\right)$$

となる。強度 I は、

$$I = |A|^2 = \frac{A_0^2}{r_x^2}\left|e^{ikr_A} + e^{ikr_B}\right|^2 = \frac{A_0^2}{r_x^2}2(1 + \cos(kr_A - kr_B))$$

$$= \frac{A_0^2}{r_x^2}2\left(1 + \cos\frac{kxd}{L}\right)$$

$$= \frac{A_0^2}{r_x^2}2(1 + \cos(2\pi xd/\lambda L))$$

ここでλ＝2π/k を用いた。

cos の部分からλL/d の周期で強度が変化する。縞模様の明と明（暗と暗）の間隔は同じくλL/d となり、明暗はサインカーブ（あるいはコサインカーブ）で変化する。

[C]単孔の干渉縞

孔が狭ければ光が回折し、ダブルスリットを使わなくとも単スリットでも干渉縞ができることが知られている。縞模様の強度関数はシンク関数（sinx/x）的に変化することは以下のようにして示せる。

今度は、開口幅Ｄの単スリットが距離Ｌ離れたスクリーンに正対しているとする。単スリットの中央をO‘そこからスクリーン上の最短点をOとする。O’からξ離れた点Ｐから出た光がスクリーン上のOからx離れた点Ｑに到達したとするとＱでの振幅は$\frac{e^{ikr}}{r}$となる。ここでrはＰとＱとの距離、

$$r = \sqrt{(L^2 + (x - \xi)^2)} \sim r_x - \frac{x\xi}{L}$$

である。ただし、$r_x \sim L + \frac{x^2}{L}$である。単スリット上の全ての点から来る光のＱ点上の複素振幅は、ξについて積分すればよく、

$$A = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{e^{ikr}}{r}d\xi$$

で表される。

分母の 1/r は指数関数の分子に比べてゆっくりと変化するので積分の外に出すことができて、

$$A = \frac{1}{r}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{ikr}d\xi$$

となり、

$$A = \frac{e^{ikr_x}}{r}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{\frac{ikx\xi}{L}}d\xi = \frac{e^{ikr_x}}{r}\left[\frac{L}{ikx}e^{\frac{ikx\xi}{L}}\right]_{-D/2}^{D/2}$$

$$= \frac{e^{ikr_x}}{r}\frac{L}{ikx}\left(e^{\frac{ikxD}{2L}} - e^{-\frac{ikxD}{2L}}\right)$$

$$= \frac{e^{ikr_x}}{r}\frac{L}{ikx}\frac{1}{2i}\sin\frac{kxd}{2L} = -\frac{D}{4}\frac{e^{ikr_x}}{r}\mathrm{sinc}px$$

ただし sinc はシンク関数 sincx=sinx/x で、p=kD/2L=2πD/2λL である。

ξ<<L なので、$r_x=r=\sqrt{L^2+x^2}$としてよく、強度は振幅の 2 乗だから、強度Iは、$I=|A|^2$だから、

$$I = \frac{D^2}{16r^2}\mathrm{sinc}^2 px$$

となる。

sinc 関数は、偶関数でコサイン関数のように振動するが、1/x の因子のため x の大きなところではかなり小さくなる。強度関数Iの最初の因子の変化は sinc 関数の変化に比べて緩やかである。したがって、1 番目のピークに対して 2 番目、3 番目のピークはかなり小さくなる。

[D]幅をもつ複スリットの干渉縞

幅 a で間隔 D のスリットの作る振幅は、前節同様の議論から、

$$A = \int_{\frac{D}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{D}{2}+\frac{a}{2}} \frac{e^{ikr_A}}{r_A}d\xi + \int_{-\frac{D}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{D}{2}+\frac{a}{2}} \frac{e^{ikr_B}}{r_B}d\xi$$

である。ここで、r_A はスリット A からＱ点までの距離、r_B はスリットBからＱまでの距離である。

$$r_A = \sqrt{L^2 + (x+\xi)^2} \sim L + \frac{x^2}{2L} + \frac{x\xi}{L} = r_x + \frac{x\xi}{L}$$

$$r_B = \sqrt{L^2 + (x-\xi)^2} \sim r_x - \frac{x\xi}{2L}$$

ただし$r_x = L + \frac{x^2}{2L}$と置いた。

例によって分母にある $1/r_A$、$1/r_B$ の因子は積分の外に出て、それを 1/r と置けば、

$$A = \frac{e^{ikr_x}}{r}\left(\int_{\frac{D}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{D}{2}+\frac{a}{2}} e^{\frac{ikx\xi}{L}}d\xi + \int_{-\frac{D}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{D}{2}+\frac{a}{2}} e^{-\frac{ikx\xi}{L}}d\xi\right)$$

$$= \frac{e^{ikr_x}}{r}\frac{L}{ikx}\left(\left[e^{\frac{ikx\xi}{L}}\right]_{\frac{D}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{D}{2}+\frac{a}{2}} - \left[e^{-\frac{ikx\xi}{L}}\right]_{-\frac{D}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{D}{2}+\frac{a}{2}}\right)$$

$$= \frac{e^{ikr_x}}{r}\frac{L}{ikx}\left\{e^{\frac{ikxD}{2L}}\left(e^{\frac{ikxa}{2L}} - e^{\frac{-ikxa}{2L}}\right)\right.$$

$$\left. - e^{\frac{-ikxD}{2L}}\left(e^{\frac{-ikxa}{2L}} - e^{\frac{ikxa}{2L}}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^{ikr_x}}{r}\frac{L}{ikx}\left(e^{\frac{ikxD}{2L}} + e^{\frac{-ikxD}{2L}}\right)\left(e^{\frac{ikxa}{2L}} - e^{\frac{-ikxa}{2L}}\right)$$

$$= \frac{e^{ikr_x}}{r}\frac{L}{ikx}\frac{1}{4i}\cos\frac{kxD}{2L}\sin\frac{kxa}{2L}$$

$$= \frac{e^{ikr_x}}{r}\frac{L}{ikx}\frac{1}{4i}\frac{kxa}{2L}\mathrm{sinc}\frac{kxa}{2L}\cos\frac{kxD}{2L}$$

$$= -\frac{a}{8}\frac{e^{ikr_x}}{r}\mathrm{sinc}\frac{kxa}{2L}\cos\frac{kxD}{2L}$$

したがって強度Iは、I＝|A|^{2}なので、

$$I = \frac{a^2}{64r^2}\mathrm{sinc}^2 px \cdot \cos^2 qx$$

となる。ここで p=ka/2L=2πa/λL、q=kD/2L=2πD/λL である。なお、分母の r は$r = \sqrt{L^2 + x^2}$と見なして良い。