

図形の見方～トポロジーに親しもう～

奈良教育大学 花木 良

知恵の輪で遊ぼう

図1のように針金(固い素材)に輪ゴム(伸び縮みするもの)が絡んでいるもので、輪ゴムを外す知恵の輪を考えます。輪ゴムをうまく移動させることで、輪ゴムを取り外すことができるでしょうか？ 実際には作ってみてください！ 針金は100円ショップに売っています。3mmの太さのものだと丈夫に作れますが、加工に力が必要です。

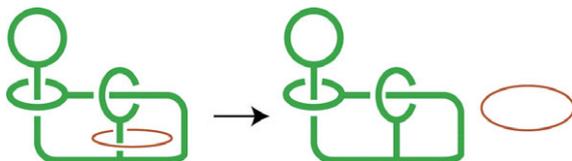


図1 輪ゴムを外す知恵の輪

この知恵の輪は、トポロジーの中の結び目理論や空間グラフ理論という分野に属します。図2の知恵の輪から輪ゴムを外すことができるでしょうか？

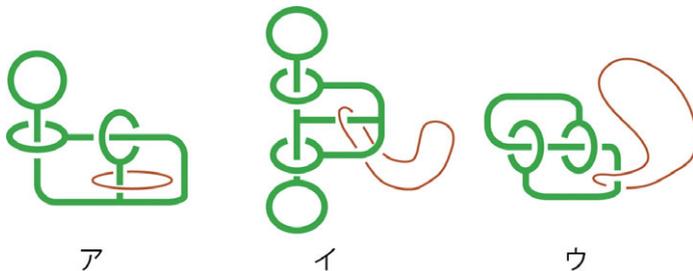


図2 知恵の輪を解こう

アとイは輪ゴムを外すことができますが、ウは外すことができません。アは、図3のように輪ゴムを移動させていけば、解くことができることがわかります。ウは、100時間頑張っても輪ゴムを外そうとしても外せないからといって、輪ゴムが外れないとは言い切れません。これを数学にして証明するようなことが空間グラフ理論の研究の一つです。空間グラフ理論は知恵の輪を分析するもので、遊びのような知的探究と思うかもしれません。しかし、最近はそのに留まることなく、狂牛病の原因はたんぱく質が知恵の輪のように絡んでいることが原因であるという仮説があり、この数学が活躍する可能性があります。

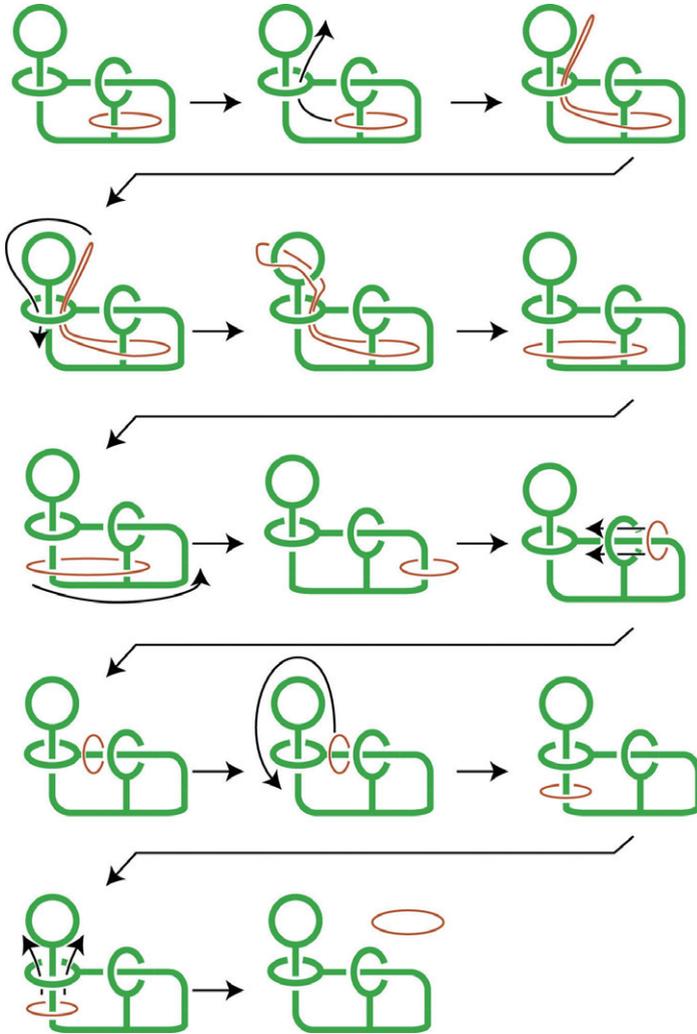


図3 知恵の輪の解法

さて、解ける知恵の輪の仕組みを簡単に説明して、各自でも新たな知恵の輪を創造できるようになって貰おうと思います。針金も輪ゴムのように自由に動くことができるとすると、図4のような変形が可能になります。図4の右の知恵の輪をみると、簡単に輪ゴムが外れることがわかります。この針金の動きを輪ゴムが柔軟に動くことで実現して、輪ゴムが外れるというのが、この知恵の輪の仕組みです。ウの知恵の輪は、針金が輪ゴムのように自由に動くと思って輪ゴムを外すことはできません。イの知恵の輪

も同様に變形して考えることができます。こう見ると、知恵の輪としては、イのほうが簡単な感じがします。

この知恵の輪について、SSH(スーパーサイエンスハイスクール)の事業で中高生がその難しさの探究を行ったり、私のゼミの学生が卒業研究で解法に関する考察を行ったりしたことがあります。



図4 針金も自由に動くとみなす

星の形を探ろう

人類は今では地球が丸いと知っていますが昔は知りませんでした。ある星があり、そこに住む星人が自分の住む星の形を知ろうとし、その星をあらゆる部分まで探検したら、図5のようにつながっていることに気づきました。図の記号は、Aを通りぬけるとAへと移動し、他も同じ記号ののところへ出てくるということを意味しています。この星は地球のように風船をふくらませたような形をしているのでしょうか？ それともまったく違う形をしているのでしょうか？

つながりを手がかりにして、地図を伸び縮みさせながら、組立ててみましょう。図6のように上の辺と下の

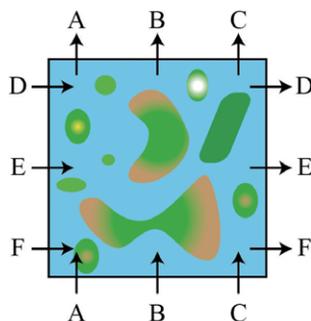


図5 ある星の地図

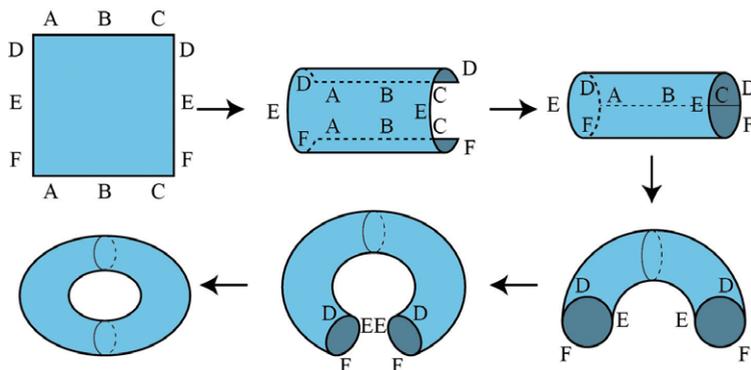


図6 地図を組み立てると、トーラスになる

辺を貼り付け、ホース状にして、次にそのホースの両端を貼りつけます。これで、この星は地球のような形ではなく、ドーナツのような形(数学ではトーラスと言います)をしていることがわかります。形はトーラスとわかりますが、きれいなドーナツの形をしているかはわかりません。ホースがからんだ状態で両端が貼りつけられているかもしれないので、図7のようになっているかもしれません。つまり、宇宙においてどのような位置にあるかはわかりません。

問1 図8の地図を組み立てると、どのような形になるでしょうか。

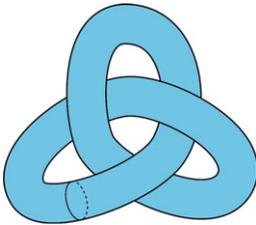


図7 からんだトーラス

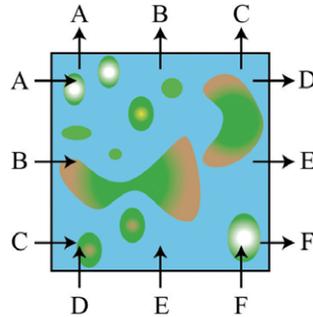


図8 どんな形か？

メビウスの帯で遊ぼう

帯状の紙を一度ひねって貼りあわせませす(図9)。これをメビウスの帯と言います。メビウスは19世紀に活躍したドイツの数学者の名前です。この帯はおもしろい特徴が多くあります。この帯は裏表の区別がつかえません。ある点から帯の上を歩いていくとその裏側にたどりつきます(図10)。また帯の境界線が2本あるように見えますが、実際には1本しかありません。次に、メビウスの帯を中心線で切断すると、どうなるでしょうか？(図11)図形はバラバラになるでしょうか？ 実際に、紙で試してみてください。他に3等分する直線で切るとどうなるか？など発展的に考えてみると、さらにおもしろい現象を味わえると思います。

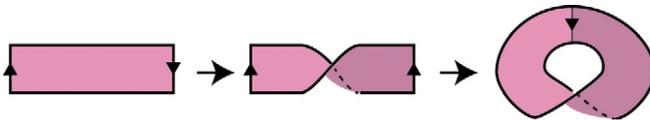


図9 メビウスの帯

問2 2つメビウスの帯をくっつけたものを作ります。このとき、ひねる向きを変え、2通り作成します。それを中心線で切るとどうなるでしょうか。ひねる向きに気をつけて下さい。



図10 メビウスの帯の上を歩く

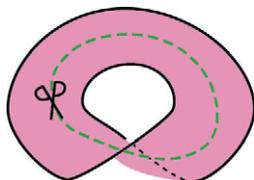


図11 メビウスの帯を切る

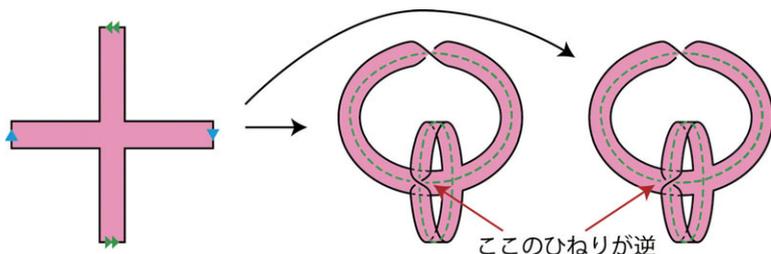


図12 メビウスの帯を合わせたものを切る

メビウスの帯はエッシャーの作品にもよく現れます。作品「メビウスの帯」では、メビウスの帯を中心線で切ると裏表の区別のつく図形になるという性質を用いて、切って裏表の色を分けて表現しています。「メビウスの帯II」は裏表の区別がつかないことを、アリが表から裏へ裏から表へと歩いていく様子で表現しています。「moebius strip i 1961」や「moebius strip ii 1963」で検索してみてください。

トポロジー

今まで見てきたように、図形を伸ばしたり縮めたりする数学の分野をトポロジーと呼びます。日本語では位相幾何学(いそうきかがく)とも呼ばれます。位相幾何学は、図形の長さや角度などを気にしないで伸ばしたり縮めたりすることを許して、図形のつながり方を探究します。

位相的な見方が少しは身についたでしょうか。普段も路線図等では、線路の長さや曲がり具合は気にせず、駅のつながりだけを気にしてみてください。この見方では、「カ」「ナ」「セ」も同じであるとみなします。(図14)。ここで、文字は線のみでできていると思ってください。つまり、線に太さはないとします。



図13 大阪環状線

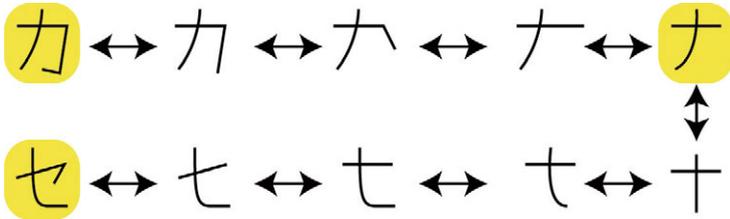


図14 「力」「ナ」「セ」は同相

是非！紙、針金や輪ゴムを用意して、実際にこの数学を味わってください。読んだだけでは本当の楽しさがわかりません。学校で学ぶ図形の分野は、数学の世界のほんの一部です。おもしろい数学は他にもたくさんあります。本屋や図書館で数学の本を手にとって数学の世界を広げてみてください。

解答

問1 図15のように変形するとギョウザの皮を包むような形になります。すなわち、地球と同相であることがわかります。

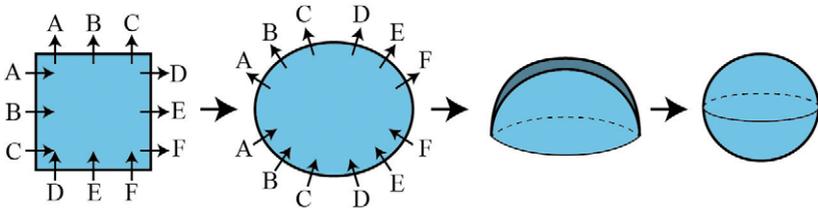


図15 地球と同相な星である

問2 自分で紙を使って試してみてください。一方はからみ合ったハートに、もう一方は離れ離れのハートになることに気づくと思います。

著者紹介 花木 良(はなき りょう)



早稲田大学教育学研究科博士後期課程修了(博士(理学))。専門は位相幾何学(結び目理論、空間グラフ理論)と数学教育学(教材開発)。数学の魅力を多くの人に伝えるために大阪市立科学館に展示物を設置する等の活動を行っている。