ペンローズの三角形とタイル

長谷川 能三（科学館 学芸員）

1. ノーベル物理学賞

毎年10月上旬にノーベル物理学賞の発表があります。この時期になると、今年はどんな業績で誰にノーベル物理学賞が授与されるのだろう…と私も気になるのですが、それはみなさんが気になっているのとはちょっと違った意味なのです。というのも、その業績がいったいどのような内容なのか、どんな意味があるのかなど、解説をしなければならない機会が出てくるからなのです。特に日本人の受賞が決まると、世間の注目も高く、マスコミからの問い合わせを受けることもあります。

そのノーベル物理学賞の受賞業績には、年ごとにとある法則があります。それは、ある年が「物性分野」であれば、翌年は「物性以外の分野」、その翌年は「物性分野」…と、受賞の業績がだいたい交互になっているのです。2000年以降のノーベル物理学賞の受賞となった業績を見てみると表1のとおりです。2年続けて物性分野の時もありますが、物性分野と物性以外の分野がほぼ交互になっています。

「物性」というのは原子や分子が集まってどんな性質になっているかを研究する分野で、例えば原子や

表1. ノーベル物理学賞の受賞業績と分野

受賞年	受賞業績	物性	物性以外
2000年	情報通信技術における基礎研究	○	
2001年	アルカリ金属ガスにおけるボース・アインシュタイン凝縮の実現と凝縮系の基礎研究	○	
2002年	宇宙ニュートリノの検出 天体物理学への先駆的貢献		○
2003年	超伝導と超流動の理論	○	
2004年	強い相互作用における漸近的自由性の理論的発見		○
2005年	光学コヒーレンスの量子論への貢献 レーザーに基づく精密分光法の開発	○	
2006年	宇宙マイクロ背景放射の非等方性の発見		○
2007年	巨大磁気抵抗の発見	○	
2008年	自発的対称性の破れの機構の発見 対称性の破れの起源の発見		○
2009年	ファイバー内光伝達に関する業績 CCDセンサーの発明	○	
2010年	二次元物質グラフェンに関する実験	○	
2011年	宇宙の加速膨張の発見		○
2012年	個別の量子系に対する計測および制御を可能にする実験的手法に関する業績	○	
2013年	ヒッグス粒子に基づく質量の起源の説明		○
2014年	青色発光ダイオードの発明	○	
2015年	ニュートリノ振動の発見		○
2016年	物質のトポロジカル相とトポロジカル相転移の理論的発見	○	
2017年	重力波の観測への貢献		○
2018年	光ピンセットの開発 超短パルスレーザーの生成方法の開発	○	
2019年	物理宇宙論における理論的発見 太陽系外惑星の発見		○

分子が規則正しく並んだ結晶であるとか、シリコン等の原子が集まってできた半導体、超伝導や超流動、磁性体など、さまざまな物質のいろいろな性質を研究しています。それに対して「物性以外の分野」というのは、例えば原子核や素粒子、天体や宇宙論などの分野です。日本物理学会でも、年2回ある学会の内、1回は全分野の研究者が集まって行ないますが、もう1回は「主に物性分野」と「物性以外の分野」に分かれて、場所と少し時期を変えて行なっています。しかし、2つに分けても物性分野の研究者は多く、発表も多いのです。

私が大学で研究していた分野は物性で、大倉学芸員は原子核(物性以外)ですので、ノーベル物理学賞が物性分野の場合には私にもわかるような話かどうか…とドキドキしているのです。

2019年のノーベル物理学賞は「物理宇宙論における理論的発見」と「太陽系外惑星の発見」の業績でしたので物性以外の分野でした。ということは、2020年はたぶん物性分野…とドキドキしていたら「ブラックホールの研究」ということで、2年続けて天文学、つまり物性以外の分野でした。ブラックホールなら石坂学芸員の専門なので私の出る幕はないと思っていたのですが、なんとその受賞者3人の内の1人が、ノーベル物理学賞の発表時に行なっていたサイエンスショーの中で名前を出していたロジャー・ペンローズだったのです。

といっても、サイエンスショーでブラックホールの話をしていたのではありません。サイエンスショーは「ふしぎな形」という目の錯覚(錯視)やトリックアートをテーマにしたものだったのです。先月の月刊「うちゅう」に書いていただいた竹内龍人氏の記事「錯視」の中でも少し出てきていますが、ロジャー・ペンローズと言えば「ペンローズの三角形」と呼ばれる不思議な図形で有名なのです。

2. ペンローズの三角形

サイエンスショーで紹介していた「ペンローズの三角形」は、図1のようなものです。なんとなく見ただけではなんでもないように見えるのですが、よく見るとどうでしょうか。赤のブロックの上に黄色の柱、その上に緑色のブロックが乗っています。緑色のブロックから右手前に伸びた水色の棒と、赤のブロックから右奥に伸びた赤紫色の棒が、青いブロックでつながっています。上にある水色の棒と、下にあるピンク色の棒が、どうしてつながってしまったのでしょうか。これがペンローズの三角形の不思議なところなのです。

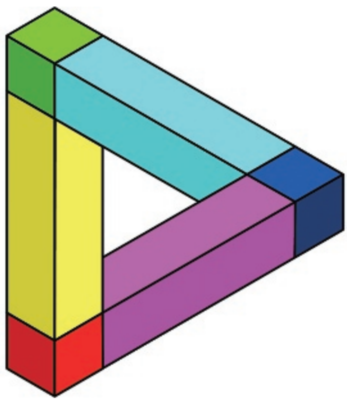


図1. ペンローズの三角形

例えば写真1のサイコロの写真、もちろん写真ですので平面ですが、写っているは立方体のサイコロだと思いますよね。図2の絵はどうでしょう。これも平面の絵ですが、立方体のサイコロを描いていると思うでしょう。では図3はどうでしょうか。単に菱形を3つ並べているだけですが、立方体に見えるのではないでしょうか。このように、平面に描かれたものでも、私たちは立体物としてイメージすることができる…というか、イメージしてしまうのですね。

写真1. サイコロの写真

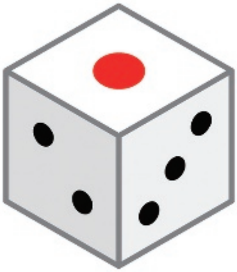


図2. サイコロの絵

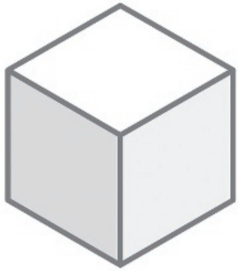
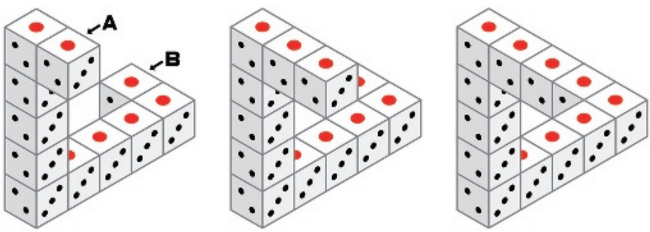


図3. 立方体？

図4(a)は、サイコロを縦に5個積んで右手前に1個伸ばし、更に一番下から右奥そして左奥へとつないだもの…というように見えると思います。平面に描かれている絵なんですけどね。Aのサイコロの右手前にさらにサイコロを1個くっつけて、Bのサイコロの左奥にもサイコロを1個くっつけると、このふたつのサイコロはちょうど前後に重なります(b)。ここで、ちょうど重なるのなら…と前後関係もこっそり一致させてしまったのがペンローズの三角形なのです(c)。本来は奥にあるものが手前にあるものと同じ位置にあるように描かれているのですから、実際にはありえない立体物ということになります。



(a)つながる前　(b)普通に伸ばすと　(c)前後を重ねると

図4. サイコロで描くペンローズの三角形

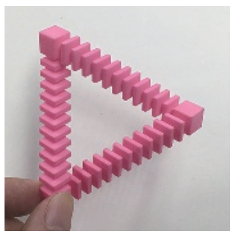


写真2. ペンローズの三角形を作った？

でも、ちょっと工夫すると、写真2のような立体物を作ることができます。いったいどのようにして作ったのでしょう。

3. ペンローズ・タイル

　他にペンローズの名前を付けて呼ばれているものに、「ペンローズ・タイル」があります（写真3）。

　歩道などに敷き詰められたタイルは、普通は正方形や長方形のものが多いですね。これはタイルを作りやすくて、隙間なく敷き詰めやすい形なのです。でもこのペンローズのタイルは、正方形でも長方形でもありませんし、実は2種類の形のタイルを使っているのです。

　まず、正多角形のタイルを敷き詰めることを考えてみましょう。正三角形や正方形、正六角形のタイルなら同じ形・同じ大きさのタイルだけで隙間なく敷き詰めることができます。しかし、正五角形や正七角形、正八角形などのタイルでは、隙間ができてしまいます（図5）。正九角形より先でも隙間ができてしまうので、隙間なく敷き詰められる正多角形は、正三角形、正方形、正六角形の3種類しかないのです。

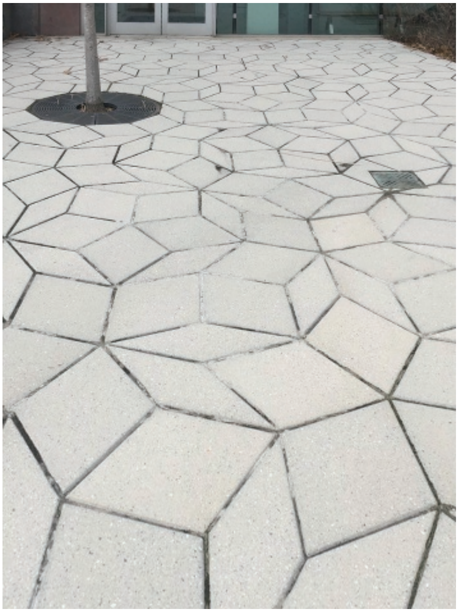
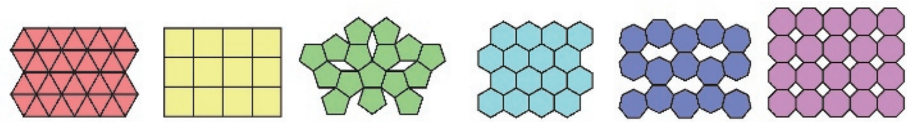


写真3. ペンローズ・タイル
写真提供：橋本幸士氏
撮影場所：Simons Center for Geometry and Physics（アメリカ）



（a）三角形　（b）正方形　（c）正五角形　（d）正六角形　（e）正七角形　（f）正八角形

図5. 正多角形のタイルの敷き詰め

　さらに、この隙間なくタイルが敷き詰められた図5（a）（b）（d）には、「並進対称性」と「回転対称性」というふたつの対称性という特徴があるのです。「並進対称性」というのは、ある方向にある距離だけ動かしても、元の図とピッタリ合うということです。また「回転対称性」というのは、ある角度だけこの図を回転させても、やっぱり元の図とピッタリ合うということです。もちろんある方向にある距離だけ動かしたら、縁の形が絶対に合いませんので全体がピッタリ合うことはありませんが、元の図と重なっている部分では、タイルの位置がピッタリ合うのです（図6）。

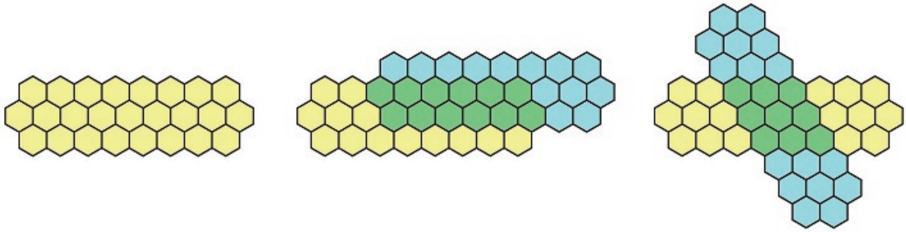


図6.「並進対称性」(中央)と「回転対称性」(右)

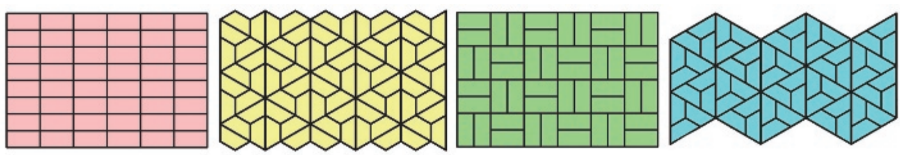
正多角形の場合に限らず、例えば図7のような長方形や台形のタイルを隙間なく敷き詰めた場合でも、並進対称性や回転対称性があることがわかります。さらにこの図をよく見てみると、

(a)180度回転させると、元の図と重なる
(b)120度や240度回転させると、元の図と重なる
(c)90度、180度、270度回転させると、元の図と重なる
(d)60度、120度、180度、240度、300度回転させると、元の図と重なる

ようになっています。

(a)は180度ずつ2回回転させると元の図に、(b)は120度ずつ3回回転させると元に図に、(c)は90度ずつ4回回転させると元の図に、(d)は60度ずつ6回回転させると元の図に戻ります。このため、それぞれ「2回対称」「3回対称」「4回対称」「6回対称」といいます。ところが、並進対称性があって、「5回対称」や「7回対称」以上の回転対称性もある図形はないのです。

原子や分子が規則正しく並んだ結晶にも、これらの図形と同じように、並進対称性や回転対称性があります。そして、結晶にも5回対称の回転対称性はありません。



(a)2回対称　(b)3回対称　(c)4回対称　(d)6回対称

図7. いろいろな回転対称性

一方、「ペンローズ・タイル」は、これらのタイルの敷き詰めと違って、1種類ではなく2種類のタイルを使っています(図8)。また、並進対称性も回転対称性もありません。しかし、並進対称性と似たような性質や、回転対称性(しかも5回対称や10回対称)と似たような性質があるのです。

例えば、図9でピンク色に塗ったボクシングのグローブのような形を探してみると、あちこちに同じ形があるのがわかります（黄色や水色）。しかも同じ向きのままある方向にある距離だけずらした並進対称性のような関係にあるものか、さらにそれをある角度（36度の倍数）だけ回転させた回転対称性のような関係にあるのです。このように、並進対称性や回転対称性に似ているといっても部分的な関係ではあるのですが、もっとたくさんのタイルを合わせた大きく複雑な形でも、もう少し範囲を拡げれば必ず同じ形があり、しかも36度の倍数の角度だけ回転させた向きになっているのです。例えばグローブを3つ合わせたような水色に塗った形も、この図の中に2つありますね。

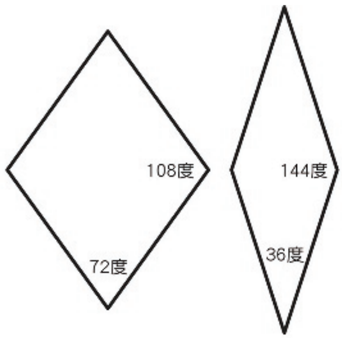


図8. ペンローズ・タイルを構成する2種類の菱形

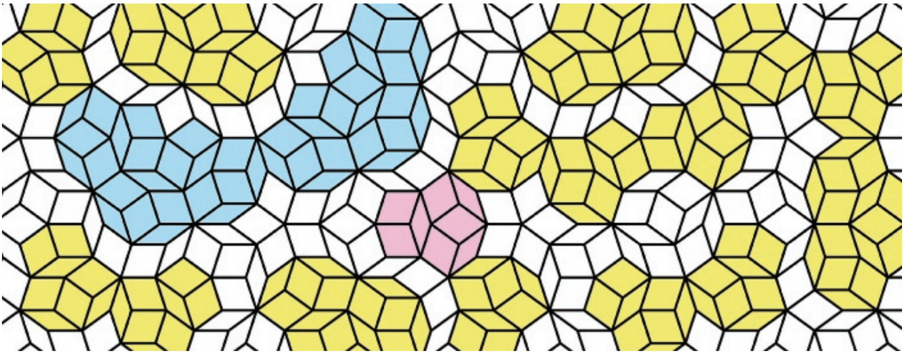


図9. ペンローズ・タイルとその中に含まれるパターンの例

このような2種類の菱形タイルの敷き詰めは、単に図形遊びのようにも思えますが、X線解析で10回対称等のパターンを示す物質が見つかっています。このような物質は準結晶と呼ばれ、ペンローズ・タイルのようなパターンを紙面に垂直な方向に伸ばした構造や、ペンローズ・タイルを三次元に拡張したような構造だったりします。

準結晶を発見したダニエル・シェヒトマンは、2011年にノーベル化学賞を受賞しています。ノーベル物理学賞、化学賞、医学・生理学賞は受賞者が一度に3人までとなっているのですが、近年この3賞において、単独で受賞することはあまりありません。そんな中、この2011年のノーベル化学賞はダニエル・シェヒトマンの単独受賞だったので、それならロジャー・ペンローズにも…と思っていました。ところが2020年、そのロジャー・ペンローズが、彼の本来の専門であるブラックホールに関する研究でノーベル物理学賞を受賞となったのです。

（はせがわ よしみ・大阪市立科学館学芸員）