フラクタルタイル

大阪大学大学院情報科学研究科　和田　昌昭

フラクタル

少し変わった図形で、全体が自分自身と相似な形のパーツを合わせてできているようなものをフラクタルとよびます。百聞は一見に如かず、図1を見てください。全体＝F が、F と相似な赤のパーツ F_1 と青のパーツ F_2 を合わせてできていますね。

図1. F は F と相似なパーツを合わせてできている

フラクタルという概念は、1980年ごろにマンデルブロというフランスの数学者が提唱して注目を浴びました。図2左はロマネスコという野菜ですが、全体と同じような形のコブが多数あって、そのコブにはまた同じ形のコブが多数あって、というフラクタル構造が初めて見る人を驚かせます。右はロマネスコの質感を意識して数学的に作ったフラクタル図形です。

図3は数学的に構成したフラクタルの一部ですが、渦巻銀河の天体写真のようにも見えます。このように、自然界のいろんなところにフラクタル的な要素があるんですね。

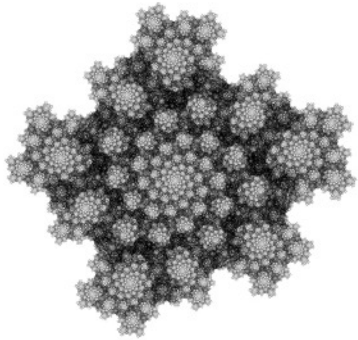

図2. ロマネスコとフラクタル（$a_1=0.2044+0.9355i$, $a_2=-0.2262-0.291i$）

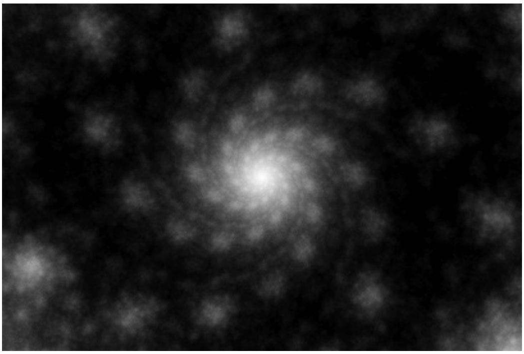

図3. フラクタル（$a_1=-0.812+0.486i$, $a_2=-0.122-0.552i$）

相似変換

本稿では、フラクタルの数学的側面を掘り下げてみたいと思います。回転と平行移動の合成は合同変換ですが、これに拡大・縮小をプラスしたものが相似変換です。[1]

合同変換 ＝ 回転と平行移動の合成
相似変換 ＝ 回転と拡大・縮小と平行移動の合成

二つの三角形が合同変換でうつり合うための条件として三辺相等や二辺挟角相等などの条件があり、二つの三角形が相似変換でうつり合うための条件として三辺比相

1　ここでは話を簡単にするために、向きを逆にするいわゆる線対称変換は除いて考えています。

等や二角相等の条件があることは中学校で習いますね。

相似変換は、平行移動でない限り、ある点cを中心とした回転と拡大・縮小の合成になります。複素数をご存知の方のために少し説明します。難しかったら読み飛ばしても大丈夫です。相似変換は、点（x, y）を複素数 $z=x+yi$ と同一視した複素平面を用いて表すと便利です。点 z に複素数 a をかける操作は原点を中心とした回転と拡大・縮小の合成になり、逆に原点を中心とした回転と拡大・縮小の合成は必ず az という式で表せます。平行移動は別の複素数 b を足すことで表現できるので、一般の相似変換は $az+b$ という1次式で表すことができます。原点以外の点 c を中心とした回転と拡大・縮小の合成はどうなるかというと、まず $-c$ 平行移動して原点中心に移動した後 a 倍の相似変換を行い最後に $+c$ の平行移動で元の場所に戻ると考えると、$a(z-c)+c$ という式で表せます。これが与えられた相似変換の1次式 $az+b$ に一致するためには、$(1-a)c=b$ となっていればいいことになります。$a=1$ となる平行移動の場合を除けば $c=b/(1-a)$ とおくことができて、与えられた相似変換が $c=b/(1-a)$ を中心とした回転と拡大・縮小の合成であることがわかります。

さて、図1のフラクタルの考察に戻りましょう。F を F_1 にうつす相似変換を f_1、F を F_2 にうつす相似変換を f_2 とすると、

$$F=f_1(F) \text{ と } f_2(F) \text{ の和集合}$$

となっています。f_1 と f_2 は図形全体をその一部分にうつすので縮小相似変換です。縮小相似変換 f_1 と f_2 があって、この式がなりたつことがフラクタルの基本的性質です。

逆に縮小相似変換 f_1 と f_2 を勝手に与えたら、式がなりたつようなフラクタル F は

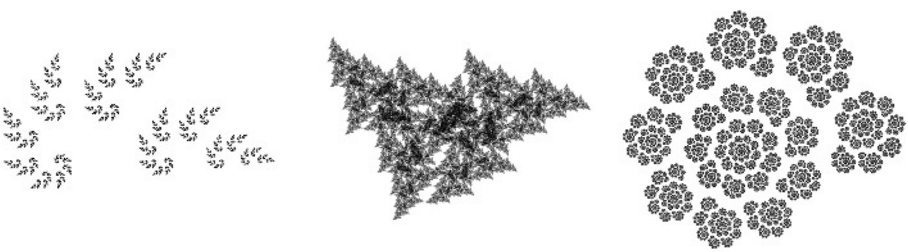

図4. 一般的なフラクタル　左（$a_1=0.5+0.5i$, $a_2=0.5$）
中（$a_1=-0.4+0.6i$, $a_2=-0.5-0.5i$）、右（$a_1=0.7+0.6i$, $a_2=-0.2-0.25i$）

あるのでしょうか。驚くべきことに、そのような F が必ず一つだけ存在するのですが、その証明は専門的になるので割愛することにして、F がどのような図形になるか具体例をいくつか見てみましょう。一般的なフラクタルは図4のような図形で、中身がスカスカだったり、重なりがあったりします。図1のような中身が詰まっていてしかも重なりのないフラクタルはかなり特殊なフラクタルということができます。

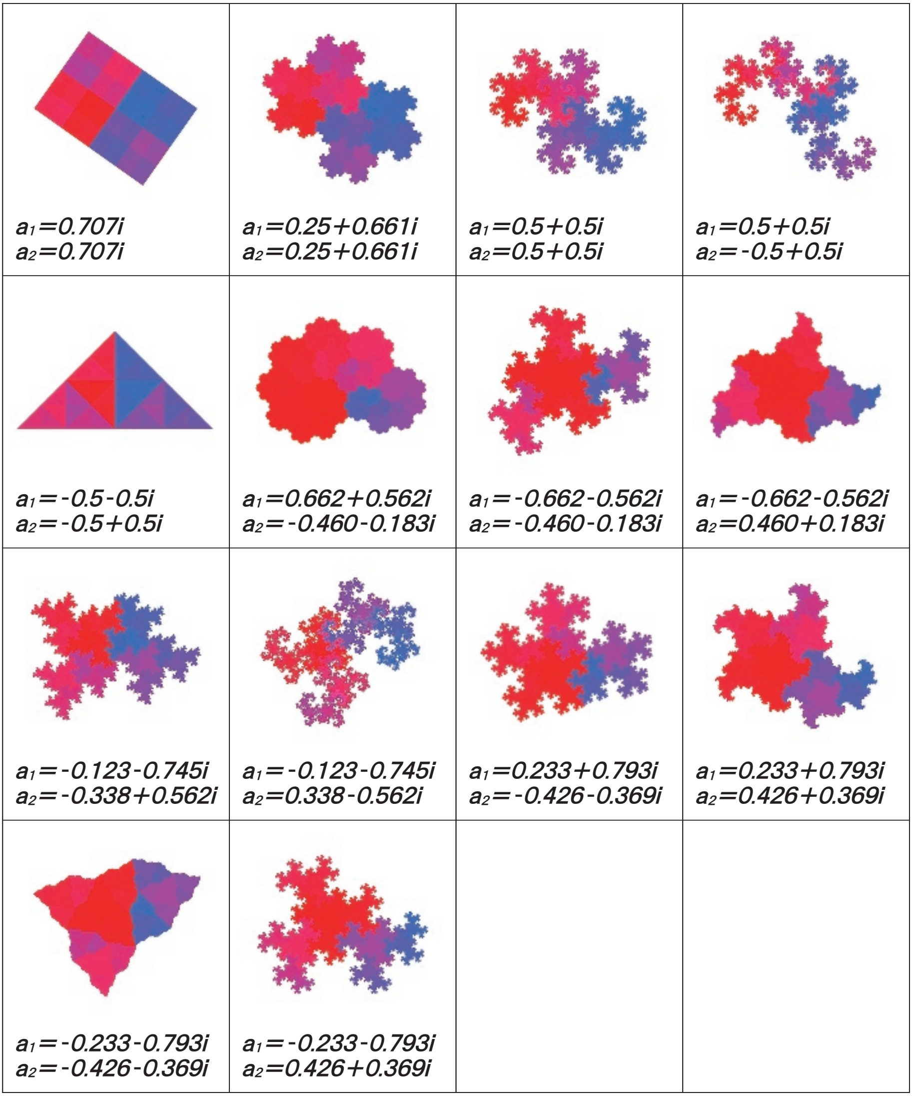

図5. 2つの相似変換で定まるフラクタルタイル

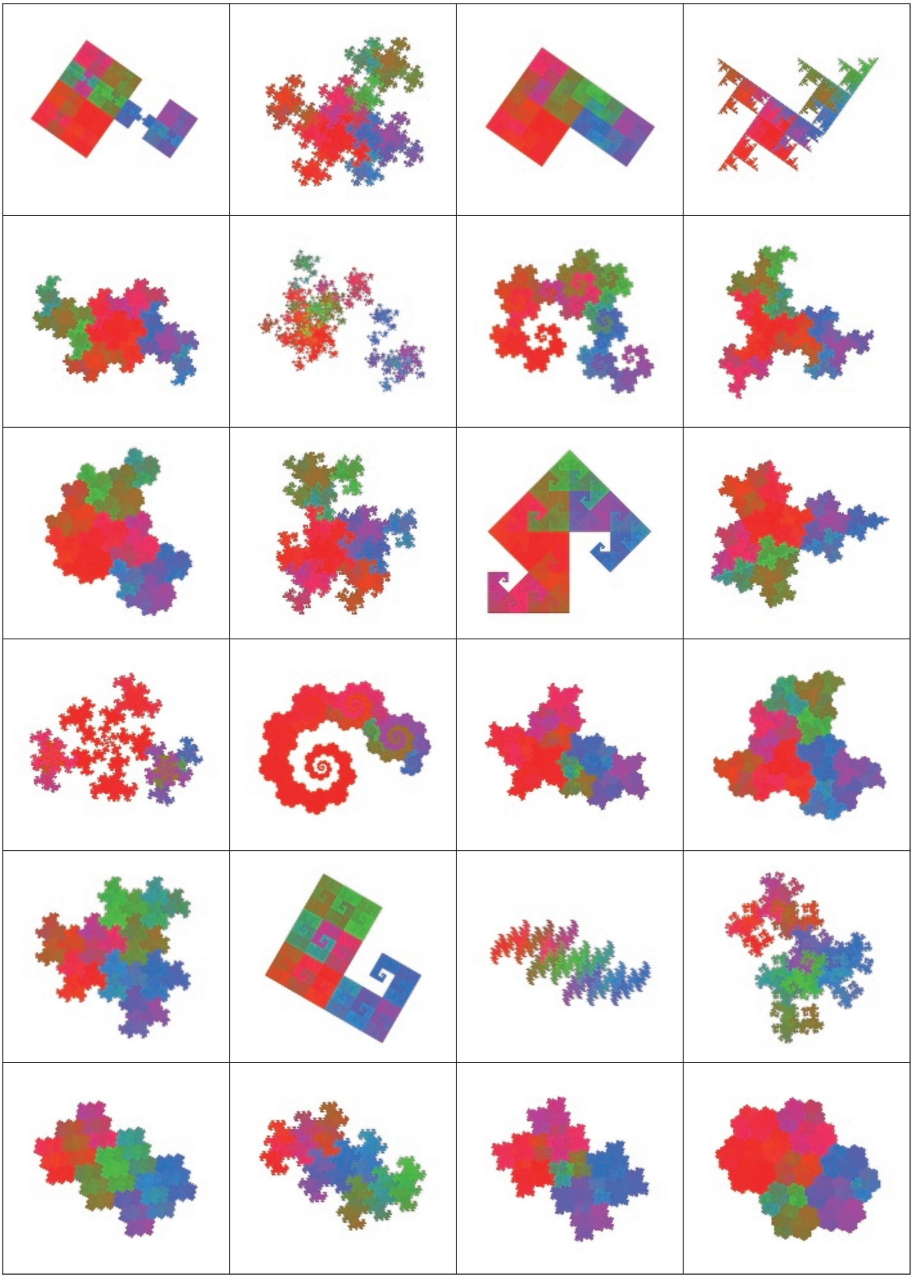

図6. 3つの相似変換で定まるフラクタルタイルの一部

Fractal Gazer

　フラクタルの研究をするために、筆者はFractal Gazerというプログラムを開発しました。Mac App Storeで無料配布していますので、Apple Macコンピュータをお持ちの方はダウンロードして触ってみてください。使い方はとっても簡単で、画面上の赤い丸や青い丸をマウスでドラッグするだけです。フラクタル図形がぐるぐると変化します。本稿に掲載しているフラクタル図形はすべてFractal Gazerで作成したものです。図2〜5は、赤丸をクリックしてウィンドウ下部の座標欄に説明にあるa_1の値を代入し、青丸をクリックしてa_2の値を代入すると得られます。

フラクタルタイル

　図1のように中身が詰まっていて重なりのないフラクタルをフラクタルタイルとよびます。フラクタルタイルをみつけるのは容易ではありません。これまでに見つかっている、2つの相似変換で定まるフラクタルタイルのすべてを図5に示します。赤っぽい部分と青っぽい部分が全体と相似で、それぞれがまた相似な二つの部分に別れて、というフラクタル構造がわかるように色付けされています。これら以外に2つの相似変換で定まるフラクタルタイルが存在するのかどうかはわかっていません。それどころか、たとえば10番目の図形が本当に中身が詰まっているかどうかもわかっていません。まだまだわからないことがあるのです。

　2つの相似変換で定まるフラクタルタイルでさえわからないことがあるのだから、3つの相似変換で定まるフラクタルタイルはわからないことだらけです。図6は、筆者がみつけた3つの相似変換で定まるフラクタルタイルの一部です。不規則そうなものがあるかと思えば、幾何学的な図形も混じっていて、フラクタルの世界は奥が深いです。

著者紹介　和田　昌昭（わだ　まさあき）

1958年生まれ。大阪大学、コロンビア大学で数学を学び、ペンシルバニア大学、奈良女子大学等を経て現在大阪大学教授。専門は幾何学。フラクタル幾何学研究のためのプログラムFractal Gazerを開発し無料公開中。趣味の音楽制作では、YouTube動画「宿酔」が150万回再生のヒット。