数の表記法で遊ぶ

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所　石塚 裕大

数学は数や図形を研究する学問とよく聞きます。しかし何を研究するのかと聞かれることもたまにあります。今回は、数の表し方＝**記数法**の話題を通じて、たとえばどんな題材があるのか、そしてそれが研究となりうる話題へとどう発展するのか、その様子をお見せできればと思います。

1. 数の表し方いろいろ

数を表すとき、普通は**10進法**を使っているかと思います。10ごとに1くり上がるあの方法です。たとえば2021なら、

$$2021=2\times1000+0\times100+2\times10+1\times1 \quad (*)$$

です。1, 10, 100, 1000と順番に大きくなるブロックを使って、大きな数を分解しているわけです。下図のように天秤とおもりとして考えると、ちょっと理解しやすくなるかもしれません。

ちょっとだけこの方法の特徴を考えてみます。まず各ブロックは、10倍10倍で増えていきます。10を底（てい）としたべきというやつです。

$1=1$

$10=1\times10$

$100=1\times10\times10$

$1000=1\times10\times10\times10$

図１　10進法の天秤

次に各ブロックは一個も使わないことができます。変わった言いかたをすれば、ゼロ個使うということです。また、どのブロックも九個あれば十分で、0, 1, 2, ……といった数を、一通りに表すことができます。一通りに表すことができると、「この数とこの数は同じなのか？」という疑問が見たまま判断できるので、ちょっとだけ計算の手間が減りますし、最後にどっちで答えにすればいいか考える必要もありません。

10進法以外に使われている数の表し方というと、どういうものがあるでしょうか。まずコンピューターで使われているのが、**2進法**です。10進法ではブロックの増え方が10のべきでしたが、2進法では2のべきになります。

1=1
2=1×2
4=1×2×2
8=1×2×2×2

また、各ブロックは使うか使わないかの二択しかありません。つまり一個使うか、ゼロ個使うかです。この二択しかないという点が、電気回路のオンオフにちょうどうまく対応して、コンピューターでの数の取り扱いに向いているというわけです。

試しに2021を表してみましょう。まずそれぞれ何個必要かを計算してみると、

2021=1×1024+1×512+1×256+1×128
+1×64+1×32+0×16+0×8+1×4+0×2+1×1

となります。1024は2を10回掛けたものですが、だいぶ大きいですよね。そして10進法のように、この「1024」とか「128」とかを省略します。

2021=11111100101

ただしこのままだと、右側も10進法のように見えてしまうので、右下に(2)をつけて2進法であることを表示したりします。

$2021_{(10)}=11111100101_{(2)}$

この方法も、0, 1, 2, ……のような数を一通りに表すことができます。同様に、場面によっては8進法や16進法なども使われています。

図 2　2進法の天秤

ブロックはべきで増えるとは限りません。昔の数の表しかただった**ローマ数字**は、ブロックがべきではない例の一つです。

I=1
V=1×5
X=1×5×2
L=1×5×2×5

IやXは四つ、VやLは一つまで使っていいことにすれば、99までの数を表すことができます。ただし 4 を表すのにはIIIIではなく、IVのように表すことも多いことに注目しましょう。この場合は、Vの左側にIを置くことで、「Iをマイ

図 3　ローマ数字の天秤

ナスー個使っている」と考えることができます！　天秤のたとえで言うと、反対側のお皿におもりを載せている状態です。

ほかにブロックの増え方が一定ではない例もあります。数というよりは量を表す方法になりますが、時間は1分が60秒、1時間が60分なのに、1日は24時間ですよね。距離を測る単位でもキロメートル、メートル、センチメートル、ミリメートルで違います。ヤードポンド法や尺貫法だとさらに難しくなっています。

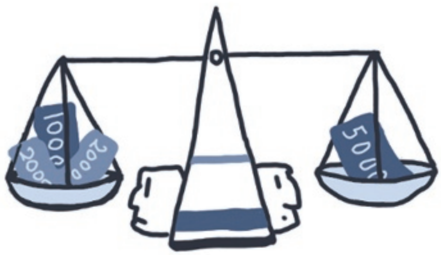

図 4　5000 = 2000×2 + 1000

日本のお金はまた別の変わったことが起きています。1000円札まではローマ数字と同様、5倍と2倍で増えていくのですが、2000円札と5000円札があるおかげで、ブロックの倍率が2.5倍と、小数が出てきてしまうのです。このおかげで、5000円を表すのに二通りの方法が出てきてしまったりします。

2. 数の表記をいろいろ試してみる

さて、我々が使っているのは 10 進法です。また計算機の世界では 2 進法、8 進法などが使われている話をしました。これらはべきでブロックが増え、また各ブロックが使える範囲は決まっています。表でまとめてみましょう。

	10 進法	2 進法	8 進法	16 進法
べきの底	10	2	8	16
使える数字	0 から 9	0 から 1	0 から 7	0 から 15

この表の規則性から、3 進法や 7 進法を考えることができます。底をそれぞれ 3, 7 とし、数字はそれぞれ 0 から 3−1=2 まで、および 0 から 7−1=6 までとすればいいのです。

式でまとめておきましょう。n を 2,3,4,5,6,... のような 2 以上の整数としたとき、n 進法は次のような特徴を持ちます：

- べきの底が n.
- 使える数字は 0 から n−1.
- 0 以上の整数をすべて表すことができる。
- その表示は（小数点を使わなければ）たった一通り。
- ケタが大きければ数は大きくなる。

では……ここから必要なのは好奇心です。使える数字の範囲を変えたらどうなるでしょうか？ あるいは n に 1 やマイナスの数、あるいは分数や小数を入れてみたら？ ここで起こることのすべてを書くことはできませんが、いくつかの例を紹介して、それぞれで上の「ふつうの」記数法の性質がどう崩れるかを見てみましょう。

(1) 1進法

まず n=1 です。上のルールそのままだと、使えるブロックが 1−1=0 しかないので、ゼロしか表すことができません。これではあんまりなので、各ブロックを一個まで使っていいことにしましょう。


図 5「1進法」の天秤

しかし使えるブロックは

1=1
1=1×1
1=1×1×1
1=1×1×1×1

とどこまでいっても1なのです。つまりおもりは全部同じ重さなので、おもりの個数を数えるだけとなります。なので、たとえば

$$3_{(10)}=111_{(1)}=1100100_{(1)}=0.100101_{(1)}$$

はすべて 3 を表すことになり、表し方はまったく一通りではありません。ケタが増えれば数が大きくなるなんて性質もなくなってしまいます。 2021 を表そうとはしない方が良さそうですね（図5）。

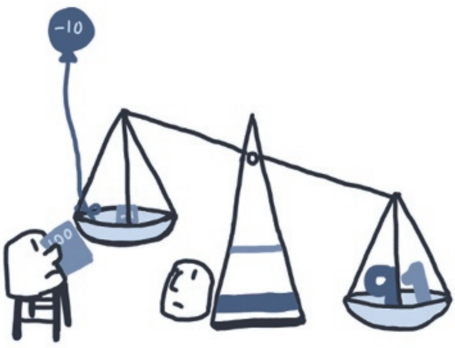

図 6「-10進法」の天秤

(2) -10進法

今度は思い切って、n=−10とするとどうでしょうか。各ブロックを何個使えるかが問題ですが、ここでは九個としてみましょう。使えるブロックは、

1=1
−10=1×(−10)
100=1×(−10)×(−10)
−1000=1×(−10)×(−10)×(−10)

のようになります。「重さが−10のおもりとは？」と疑問に思うかもしれませんが、この場合は空に浮く風船だと思えます。

すると、なんとマイナス記号を使わなくてもマイナスの数を表示できます！　ためしに1から順番に−10進法で表示してみると（下付きの(−10)を省略）、

1,2,3,4,5,6,7,8,9,190,191,192,193,194,195,196,197,198,199,180,...

と、なんと10を表すために三桁必要になります。さらに20が180と表示され、10が190と表示されるので、見かけ上減っているように見えてしまいます。

0, −1, −2, ……を表示してみましょう。すると、

0,19,18,17,16,15,14,13,12,11,10,29,28,27,...

となって、かなり見慣れない列になります。199695 と 329748 を比べればわかるように、見かけだけでどちらが大きいのかを判定するのはちょっと大変です。しかし10進法と同じように0以上の整数を一通りに表すことのできる記数法です。

(3) 3/2進法

今度は $n=\frac{3}{2}$ としてみましょう。ブロックの重さは以下の通りです：

$$1=1$$
$$3/2=1\times 3/2$$
$$9/4=1\times 3/2\times 3/2$$
$$27/8=1\times 3/2\times 3/2\times 3/2$$

各ブロックの個数はいろいろありますが、ここでは 1, 0, −1 を使っていい場合を考えてみましょう。前にも書いたとおり、 −1 は天秤の反対側におもりを置くことと考えられることに注意してください。−1 は二文字使うので、ここでは $\bar{1}$ のように上線で表すことにします。

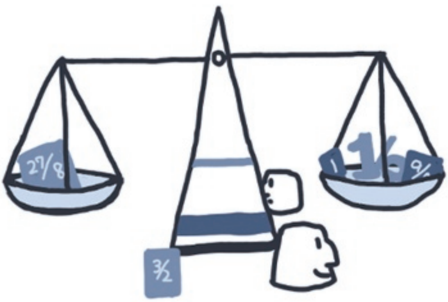

図 7「3/2 進法」の天秤

この場合は数を表すのが一苦労です。まず 2 を表すのに無限小数を使わなくてはいけません：

$2_{(10)}=0.1111111..._{(\frac{3}{2})}$.

ところが、1/2　を表そうとすると有限で済みます。−1 があるおかげです。

$$\frac{1}{2}_{(10)}=1\times\frac{3}{2}+(-1)\times 1=1\bar{1}_{(\frac{3}{2})}$$

さらに、1/4, 1/8 なども同様です：

$$\frac{1}{4}_{(10)}=(-1)\times\frac{9}{4}+1\times\frac{3}{2}+1\times 1=\bar{1}11_{(\frac{3}{2})},$$

$$\frac{1}{8}_{(10)}=1\times\frac{27}{8}+(-1)\times\frac{9}{4}+0\times\frac{3}{2}+(-1)\times 1=1\bar{1}\,0\bar{1}_{(\frac{3}{2})}.$$

1/4 を見ればわかるように、てっぺんの数字が $\bar{1}$ だからといって、数がマイナスになるわけでもありません。またケタが増えれば数が大きくなるわけでもなく、どんどん細かい数を表すことができてしまいます。さらにどんな数を表すことができるのかもかなり難しい問題です（5/16 を実際に表してみてください）。10進法の特徴の多くが成り立たない、変わった表記法だといえるでしょう。

3. おわりに

さて、変わった記数法を考えて、それぞれが10進法とどのくらい変わってしまうかを眺めてきました。一方で、10進法にはなかった特徴も出ています。

「知っているものをよく観察し、実験的に少し変えて、何が成り立たなくなり、どんな性質が新しく成り立つかを調べる」という方法は、数学の研究でよく用いられる手段の一つです（数学に限りませんが）。記数法という題材で、我々はこれを追体験したわけです。また何のどこに注目し、どう変化させるかは、その実験をする人の興味本位で構いません。実際それが思いもよらないところに結び付くことがあります。

筆者が今回の意味での 3/2 進法を考えたのも興味本位です。ところが調べてみると、どうも**ピゾ数**とよばれる特殊な数との関連があるとわかってきました。たとえば、有名なフィボナッチ数列で出てくる**黄金比**

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033989...$$

はピゾ数の一例です。n が黄金比のときは 0 を何通りにも表すことができる一方、0 と 0.5 の間の数を表すことはできません。黄金比以外のピゾ数も似た現象が起きるようです。

ピゾ数は他分野との関わりが深い数で、たとえばフラクタルや準結晶などとの関連もあります。ご興味のある方はぜひ秋山茂樹さんの解説記事をご覧ください。

参考：秋山茂樹「Pisot数」、数理科学 No.8（2008）40-45.

著者紹介　石塚 裕大（いしつか やすひろ）

1988年茨城県生まれ。京都大学で数学を学び、現在は九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院特定プロジェクト助教。整数やその周辺の現象について考える整数論を専門としています。