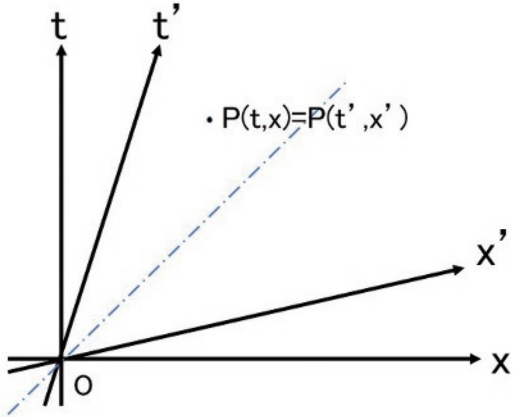
窮理の部屋184

ウラシマ効果と双子のパラドックス5

できごとを表すには

できごとがいつどこで起こったかは、時間が1つ、場所が3つ、合わせて4つの数字の組で表すことができたのでした。場所を表す数字の選び方は、座標系と呼ばれます。いろんな座標系の中から、力が働いてないときは、物体が静止しているか、等速度運動をしているように見える慣性系と呼ばれる系があって、この系を選ぶことにします。



S’系のx’軸、t’軸はS系の軸に対して同じ角度だけ傾いていて、左上がりの45度線に対して対称になっている。できごとPは、S系でP(t, x)と表してもS’系でP(t’, x’)と表しても当然ながらどちらも同じできごとを表している。

適当な慣性系を基準に選びS系と呼び、(t, x, y, z)で表すこととしましょう。この系に対して等速度vで動く(t’, x’, y’, z’)を考えると、この系(S’系と呼びましょう)もまた慣性系になっています。ひとつのできごとは、(t, x, y, z)でも、(t’, x’, y’, z’)でも、どちらでも表すことができます。このような4つの数字で表される空間をミンコフスキー空間と呼びます。ミンコフスキー空間の大事な性質は、S系でもS’系でも光速度cは不変だということです。

ローレンツ変換

これから(t’, x’, y’, z’)で表したできごとを(t, x, y, z)で表す一種の座標変換を考えます。S’系の軸の向きはS系と同じであるとし、x方向に動いているとします。すると変換式は、y’=y, z’=zとなるので、ずいぶんと思考の経済になります。

tとxの2つだけを考えればよいのでミンコフスキー空間は平面で表すことができ、それが前回までに登場した時空図でした。時空図は、習慣的に縦に基準系の時間軸、横に空間軸をとり、縦の目盛りが1秒なら、横の目盛りは光が1秒で進む距離に取ります。これは光速度cを1としたことに相当します。前回x軸とx’軸の交わる角度がθなら、t軸とt’軸の交わる角度もまたθになることを見ました。既にお気づきの人も多いと思いますが、(t, x)⇔(t’, x’)は高校で習う1次変換になります。1次変換とは、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c' & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

と表される変換のことです。(ここでは光速度と区別するため、係数のcにはダッシュをつけておきます)。行列に慣れてない方はこの式の2行2列の()は2組の1次の方程式t’＝at＋bxとx’＝c’t＋dxの係数a, b, c’, dを抜き出したものと思っていただければ良いと思います。(t’, x’)を(t, x)であらわすとは、要はa, b, c’, dを求めてやることに他なりません。

　vがcに比して十分小さいときは、求める変換は、ガリレオ変換x’＝x−vtに一致することから、vがcに比して十分小さいとき1に近づく係数γを使って、x’＝γ(x−vt)と表せることが推察できます。また軸が45度の線に対して対称ですからこの式はx’→t’、x→t、t→xと同時に置き換えたt’＝γ(t−vx)も成り立つはずです。しかしこのままでは次元が変です。これは、c＝1とみなしたからでxの係数をc^2で割ってt’＝γ{t−(v/c^2)x}とすれば正しい式になります。

ローレンツ変換

$$\begin{cases} t' = \gamma t - (v/c^2)\gamma x \\ x' = -v\gamma t + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

ただし、$\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$

　係数γは、S系でもS’系でも原点からでた光は$x^2+y^2+z^2=(ct)^2$及びこの式に’を付けた式も成り立つことから求めることができて、$\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$と求まります。結果を枠囲みの中にyとzも含めた結果をまとめておきます。この変換はローレンツ変換と呼ばれていて、いろんな求め方があり、興味のある方は例えば註にある広江さんの求め方[1]もご覧になってください。

振り返って

　十分ややこしかったかもしれませんが、ここで紹介したのはもっとも簡単な求め方のひとつです。簡単に計算できた理由は、x’＝x−vt⇔t’＝t−vxの関係が使えたからでした。これは、45度の軸が対称的だったからですが、ではなぜそうなったのかと言えば、S系でもS’系でも光速度が不変だと同時刻はどのように表されるか、ということから軸の傾きは決まったのでした。そう考えると結局、ローレンツ変換は光速度が不変であるという事実からのみで導かれる変換なのであります。

大倉　宏(**科学館学芸員**)

[1] https://eman-physics.net/relativity/lorentz.html