



## ウラシマ効果と双子のパラドックス6

今回は、途中で数分で済むのですが暗算ではちょっと難しい計算が入ります。きちんと検算してますので、結果は信じて読んでいただければと思います。

物体に力が働いていないときに、物体が静止し続けるか、等速度直線運動をしているように見える系を慣性系と呼びます。慣性系は無数にありますが、どの慣性系で見ても物理法則が同じように記述できることをアインシュタインの特殊相対性原理と呼びます。特に電磁気学の基本式であるマクスウェル方程式はどの慣性系で表しても同じ形になり、したがってそこから導かれる電磁波の伝わる速さである光速は、どの慣性系でも同じになります。これを光速不変の原理と呼びます。

前回、ある慣性系から別の慣性系への変換式であるローレンツ変換を求めましたが、上にあるような事情から、どの系で表しても光速は変わりません。それを確かめてみましょう。S系に対してx方向に等速度vで移動するS'系があったとします。時刻 $t=t'=0$ で空間の座標原点が一致していたとして、このとき原点から光が放たれたとします。光は $t'$ 後に $A(x', y', z')$ に到達したとします。 $ct'$ は光が時間 $t'$ の間に進んだ距離ですから、これは $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ に等しくなければなりません。 $x'^2$ を前回求めたローレンツ変換の式に代入して計算すると $\gamma^2\{v^2t^2-2(v/c^2)tx+x^2\}$ 、 $t'^2$ を計算すると $\gamma^2\{t^2-2(v/c^2)tx+(v/c^2)^2x^2\}$ ですから、 $(ct')^2-x'^2-y'^2-z'^2$ を計算すると $(ct)^2-x^2-y^2-z^2$ に等しくなっています。そして少し頭の体操になりますが、この値は等しいものの差ですからどちらの系でも0で、これはS系でもS'系でも光速は不変でcであることを表しています。前回、ローレンツ変換はどちらの系で見ても光速は不変であることを使って導いたのでしたから、これは当然と言えば当然です。

ここで更に面倒な計算ですが、 $ds=(ct_1'-ct_2')^2-(x_1'-x_2')^2-(y_1'-y_2')^2-(z_1'-z_2')^2$ をローレンツ変換の式を使って地道に計算してみると $(ct_1-ct_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2$ に等しくなっていることが分かります。dsは事象A<sub>1</sub>と事象A<sub>2</sub>の隔たりをあらわしていて世界間隔と呼びます。

ややこしい計算はおいといてここからが大事なのですが、dsが不変であることは、光速不変の帰結ですが、逆に一般的にはローレンツ変換というのはdsを不変にするような座標変換とも言えます。つまり、どの慣性系でも光速が不変ならその帰結として世界間隔も不変で、慣性系と慣性系間のローレンツ変換は世界間隔を変えない変換であるということです。

さて、A<sub>1</sub>が光が放たれたという事象で、A<sub>2</sub>が光が到着した事象だとします。するとどの慣性系でみてもA<sub>1</sub>A<sub>2</sub>の世界間隔は0です。この状況を相対論ではヌル的

(nullはドイツ語でゼロの意味)、あるいは光的と呼びます。世界間隔が正なら時間的、負なら空間的と呼びます。

世界間隔についてもう少し考えましょう。時刻 $t=0$ に原点から四方八方に放射された光は、時刻 $t$ では、 $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ の四次元球面上にあるはずですが、

これをなんとか平面で表すことを考えましょう。むりやり平面に表すため $z$ 方向は省略して、例によって時間を縦軸にして表すと、右図のように光の軌跡(の集まり)はひっくり返した円錐の側面になります。つまり原点と円錐表面上の点との関係はヌルの、光的になっています。適当な単位を取れば、円錐の底面と側面のなす角は、例によって45度になります。この円錐のことを光円錐(ライトコーン)と呼びます。

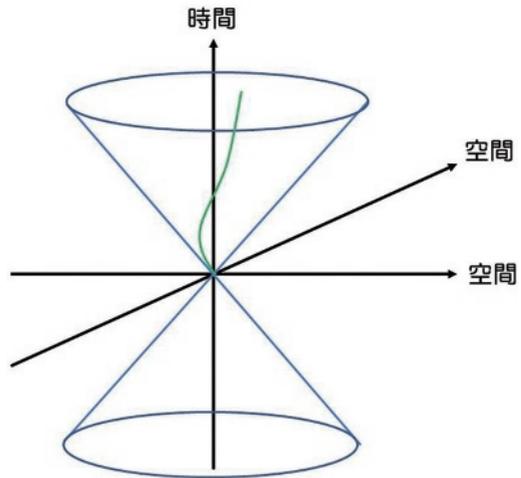
質量を持った物体が時刻 $t=0$ で原点を通るような運動をすれば、その物体は光速度を超えることができませんから、光円錐の中で45度より急な角度を持つ曲線(緑線)として表されるはずですが、この曲線のことを世界線と呼びます。

あらゆる方向からやってきて、時刻 $t=0$ に原点に届く光も考えることができるはずですが、この光円錐を先の光円錐と区別するために過去光円錐、先の光円錐を未来光円錐と呼びます。

ふたつの光円錐の外側の点(事象)は、原点とは空間的で、原点からその事象には光ですら届きませんし、逆にその事象から原点へ届くこともありません。つまり空間的な2つの事象は、絶対に因果関係を持ってないと言えます。

過去光円錐内の事象は、無関係な場合もちろんあり得ますが、原点と因果関係を持ち得る事象だと言えます。未来光円錐内の事象は、原点で起こった事象が関係している、つまり因果関係があるかもしれない事象だと言えます。

光円錐はこのように因果関係と関係していて、本稿の範囲を超えますが一昨年ノーベル賞を受賞したペンローズのブラックホールに関する特異点定理にも大きな役割を演じます。



光は、光円錐の側面に沿って直線的に進む。物体は円錐内を進み、45°より小さな角度にはならない。