



窮理の部屋 190

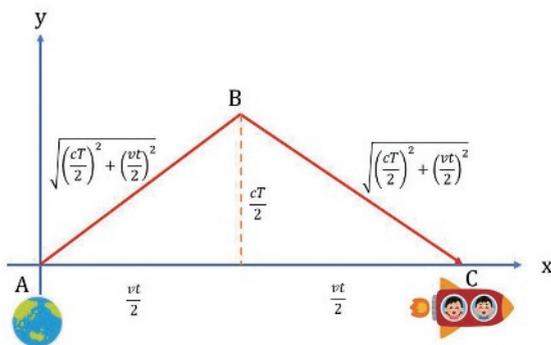
ウラシマ効果と双子のパラドックス7

相対論では、動いている物体の時計が遅れるという話がよく登場します。どのようなのでしょうか。

2枚の鏡を向かい合わせて、その間で光を何度も往復させます。光が鏡を1往復するのに要する時間 T は一定なので、時計の刻みとして使うことが可能です。2枚の鏡の間隔 L は、 T と光速 c を用いて $L = cT/2$ と表せます。

この光時計と併用する放射線時計も用意しましょう。長い半減期を持つ放射性物質 X の崩壊数は温度や圧力、運動状況とは関係なく一定なのでやはり時計として使えます。この放射線時計は時間 T の間で1000個粒子が崩壊するように放射性物質の量が調整されていたとしましょう。

さて、光時計と放射線時計を載せたロケットが地球に対して x 方向に速度 v で飛んでいるとします。向きはいつでも結果は同じはずですが、 L は v に対して垂直だとしておきましょう(y 方向、あるいは y' 方向)。そして、ロケットの飛ぶコースには、地上の時計と同期させた時計がずらりと並んでいるとします。



光が鏡を出発したとき、出発点 A に置かれた地上と同期させておいた時計の時刻が t_A 、光がもう1枚の鏡に届き、反射した瞬間の場所 B に置かれた地上と同期させておいた時計の時刻が t_B 、光が出発した鏡に戻ったとき、その場所 C に置かれた地上と同期させておいた時計の時刻が t_C であったとします。そして $t_C - t_A = t$ と置けば、当然ながら $t_B - t_A = t_C - t_B = t/2$ となります(t_A 、 t_B 、 t_C は全て地上の系での時間)。

t も光時計の光が1往復するのにかかる時間ですが、 t と T は等しくはありません。なぜならロケットから見たときは、光は直線(y 軸)を $2L$ 進んで往復しますが、地上から見ると光は y 方向平行に進むのではなく斜めに進むので、 $2L$ より長く移動しているからです。

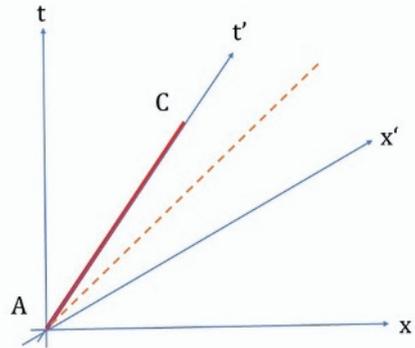
光が B に到達したとき、ロケットは $vt/2$ 進んでいるはずですから、 AB の距離は $\sqrt{(cT/2)^2 + (vt/2)^2}$ 、したがって ABC の長さは、 $2\sqrt{(cT/2)^2 + (vt/2)^2}$ です。そしてこの ABC の長さは、 ct に等しいはずですが、 T と t の関係式を作ると、 $T =$

$\sqrt{1-(v/c)^2}t$ となります。vはcを超えないため、 $\sqrt{\quad}$ は0と1位置との間の数字で、例えばv=0.866cのとき、 $T=0.5t$ となります。

この意味するところは、Cに置かれた放射線時計は2000カウントだったのに、ロケットの放射線時計は1000カウントだということです。(1000=0.5×2000)。つまり、ロケット内では時間がゆっくりと流れていたことになり、「時間の遅れ」と言われます。

ところがつつい $T < t$ なのだから、Tはtより短く、ロケット内では時間が早く進む、と誤解してしまいそうです。ロケットの外から(地上の系から)見ると光はABCのようにジグザグに進むので2Lより長く進みます。光速はどの系でも変わらないのだから、長い時間がかかっているように見えるということなのでした。

さて、この状況を時空図で表して確認しておきましょう。地球を基準系に選んでいるので、(t, x)系は直角座標で表され(ここでのtは時間間隔ではなく軸の名前)、ロケットの(t', x')系は斜交座標で表されています。いずれの系も時間軸と座標軸は光の世界線(45度の線)に対称になっていることに注意してください。そしてロケットの世界線ACはt'軸上にあります。B点はy=0ではないので、この図には書けません。



前回登場した世界間隔は、 $ds = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2$ となります。xは時間tの間にロケットの飛んだ距離vtに等しく、そして $t' = T$ ですから、結局 $(ct)^2 - (vt)^2 = (cT)^2$ より $T = \sqrt{1-(v/c)^2}t$ が導かれます。難しい計算をしなくとも直ちに答えが分かるところが世界図の素晴らしいところですし、不変量(=ローレンツ変換をしても変わらない量)である世界間隔の素晴らしいところでもあります。

さて、飛んでいるロケットの時計はゆっくり進んで見えるということでしたが、逆にロケットから地球の時計を見たらどうでしょうか?ロケットから見れば、動いているのは地球の方で地球の時計が遅れそうです。しかし、片方がもう片方に対して遅れるということは、逆にその遅れるもう片方から見れば、片方は進んで見える筈です。お互いとも遅れるというのは両立できず、どこかで破綻しているのではないのでしょうか。実は矛盾も破綻もしてないのですが、どういうことかは、次回以降で見て行きましょう。

大倉 宏(科学館学芸員)