



窮理の部屋 209

ウラシマ効果と双子のパラドックス8

双子のパラドックス

相対論では、運動する物体の長さが縮んだり、時間経過が遅くなったりします。日常では考えられないことや、一見矛盾しているのではないかとと思われることがしばしば起こります。その有名な話が双子のパラドックスとして知られている枠囲みの問題で、答えは(1)が10年、(2)が6歳となります。

この問題の不思議なところは、双子の兄と弟が再会したとき、歳が違っていることです。歳の違う双子なんて世の中に存在できるのでしょうか？

そしてロケットに乗った弟から見れば、兄と地球は0.8cで遠ざかり、そしてある時点から(自分がA星に到着したところから)0.8cで近づきます。ここでcは光速度のことですが、弟から見れば自分は止まっていて、地球と兄が動いているように見えるのです。お互いが等速度で運動していますから、基準系は地球にとってもロケットにとってもどちらでもいい、それが相対論というものです。弟から見れば兄と地球の時の刻みがゆっくりになるはずですが、ところが、再会してみると自分の方が若い。これは矛盾しているのではないか！ということです。

おかしいことが起こり、しかも矛盾しているように見えますが、おかしくもなく、矛盾もないということを問題を解きながら考えていきましょう。(1)は実は相対論とは関係なく、小学校の問題です。片道4光年の距離を0.8cで飛ぶのですから、片道に費やす時間は、4光年÷0.8cで、5年。往復ですから10年が答えになります。

(2)の問題は、ローレンツ変換の式 $x' = \gamma(x - vt)$ ……①、 $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ ……②、ここで $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ を思い出して……なんてやっていると時間がかかります。やるべき計算は、 $5^2 - 4^2 = 9 = 3^2$ だから片道3年、往復はその2倍の6年。だから6歳。これで終わりです。でもこの計算方法、いったいなんなんでしょう？

双子の弟が光の80%の速さの出せるロケットで地球から4光年離れたA星へ行き、到達したら直ちに地球に戻ります。
(1) 地球に残った双子の兄は何年弟の帰還を待つでしょうか。
(2) 弟は、地球に帰還したとき幾つ歳をとっているでしょうか。

時空図

図1は時空図と呼ばれる兄の座標系から見た弟のロケットの軌跡です(地球の自転、公転は無視しています)。時空図は相対論によく出てくる図で、横軸が空間、縦軸が時間になっています。空間は3次元あるはずですが、ロケットは直線上を運動するのでここでは空間は1次元(x)で表され、 y と z は省略されています。時空図の特徴は $c=1$ という単位を取ることです。ここでは横軸の単位を光年、縦軸の単位を年にとっています。すると時空図上では、光は 45° の傾きを持つ直線で表されることになります。物体は光速を超えて運動できないので、その軌跡は 45° より大きな傾きを持つ直線、または曲線になり、世界線と呼ばれます。

ロケットの出発を原点 O にとり、ロケットは5年かけて4光年離れたA星に到達し、10年で再び地球に帰還します。図上の OAB がロケットの世界線です。兄の座標系を S 系、弟の座標系を S' 系と呼び、例えばロケットがA星に到達したという事象は $A(t_A, x_A)_S$ とか $A(t'_A, x'_A)_{S'}$ のように S 系でも、 S' 系でもどちらでも表すことができます。 S 系では A は $A(5, 4)$ で表されますが、 S' 系ではどう表されますか?というのが(2)の問題です。 $(t_A, x_A) = (5, 4)$ を①②式に放り込めば、 $\gamma = 5/3 = 1.666\cdots$ を計算して求め $(t'_A, x'_A) = (3, 0)$ と求まります。実は①は使う必要がなく、 S' 系では空間座標の原点をロケットに置いているのですから、常に $x' = 0$ なのです。

でも、こんな計算をするのは得策ではありません。①と②を使って $t'^2 - x'^2$ を計算すると $t^2 - x^2$ になっていることを確認できると思います。 $S = t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2 \cdots \cdots ③$

($c=1$ の単位で)は4元不変量 S と呼ばれ、この不変量 S はどの系で計算しても同じ値になります。 S が不変であることは、光速 c がどの系でも不変であることと等価です。そしてローレンツ変換①②は、実は③から導かれるのでした。 $5^2 - 4^2 = 9 = 3^2$ というマジックのような計算は、不変量の式③を使った計算でした。

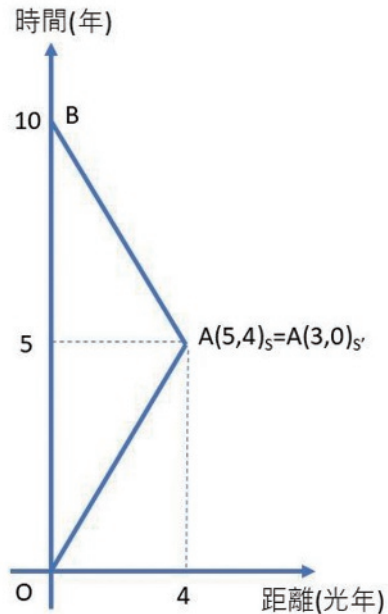


図1 S 系(地球)を基準にした時空図。Aは S 系の時空座標だけでなく、 S' 系の軸座標でも表されている。

大倉 宏(科学館学芸員)